Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Venini

Comportamento quantistico di una particella rispetto ad un osservatore uniformemente ruotante in Relatività ristretta

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 720–725.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_720_0>

Meccanica. — *Comportamento quantistico di una particella rispetto ad un osservatore uniformemente ruotante in Relatività ristretta* (*). Nota di CARLO VENINI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — Within the terms of relativistic quantum mechanics is determined the behaviour of a material particle in a uniformly rotating system of reference. The particle is likely to be found in the region that, on the contrary, is unreached according to the usual theory of Relativity. The previous result is in conformity with the Heisenberg uncertainty principle.

In un riferimento inerziale dello spazio–tempo pseudoeuclideo della Relatività ristretta lo stato quantico di una particella materiale libera è fornito dall'equazione differenziale di Klein–Gordon [1]. In tale equazione interviene come incognita la funzione di stato ψ, di cui è ben noto il significato fisico: il prodotto $\psi\,\psi^*$, con ψ^* complessa coniugata di ψ, dà la misura della densità di probabilità che possiede il corpuscolo di trovarsi, ad un determinato istante, in una assegnata posizione dello spazio. La precedente equazione può facilmente porsi in forma tensoriale; sotto tale forma risulta valida allora in un generico sistema di riferimento.

In questa Nota, introducendo l'ipotesi quantistica, determino il comportamento relativistico di un corpuscolo, non soggetto a forze effettive, in un riferimento O′ in moto rotatorio uniforme rispetto ad un riferimento inerziale O.

Detta ω l'intensità costante della velocità angolare tridimensionale, l'integrazione dell'equazione di stato implica che la densità di probabilità abbia un andamento oscillante al variare della distanza r' della particella dall'asse di rotazione e tenda a zero al tendere di r' all'infinito.

Tale andamento non risulta tuttavia periodico, poichè l'ampiezza delle oscillazioni va decrescendo al crescere di r' e assume un valore costante per r' sufficientemente elevato; tale costante dipende dall'istante t' che si considera e dall'anomalia θ'.

Osserviamo che la regione $r' > c/\omega$ (con c velocità della luce nel vuoto rispetto ad ogni osservatore inerziale) è in tal modo accessibile al corpuscolo; ciò non accade invece, ritenendo ω indipendente dai punti solidali con O′ [2], nell'ordinaria teoria della Relatività ristretta, le cui leggi, per $r' > c/\omega$, forniscono una velocità immaginaria [3].

Questo risultato mi sembra strettamente connesso al principio di indeterminazione di Heisenberg [4] della Fisica quantistica.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

In virtù di questo principio è concettualmente impossibile determinare con tutta la loro precisione sia la posizione, sia la velocità di un corpuscolo; anzi, quanto più esattamente è nota la sua posizione, tanto meno determinata è la velocità, e viceversa.

Se allora si compie una osservazione di posizione e si stabilisce con la massima precisione la posizione della particella, nulla si può dire della sua velocità, la quale non è concettualmente determinabile. I punti della regione $r' > c/\omega$ non risultano quindi preclusi al corpuscolo, a differenza di quanto accade nella teoria relativistica non quantistica, le cui leggi forniscono in tali punti una velocità tridimensionale immaginaria.

1. L'equazione di stato della Relatività ristretta

Nello spazio-tempo pseudoeuclideo della Relatività ristretta lo stato quantico di una particella libera è notoriamente descritto da una funzione ψ delle coordinate spazio-temporali soluzione della seguente equazione differenziale di Klein-Gordon:

$$g^{\lambda\sigma}\,\psi_{/\lambda\sigma} + \frac{4\pi^2}{h^2}\,m^2 c^2 \psi = 0\,, \tag{1}$$

dove la barra è simbolo di derivazione tensoriale, $g^{\lambda\sigma}$ rappresenta la generica componente controvariante del tensore fondamentale, h la costante di Planck, m la massa intrinseca del corpuscolo; qui, come in seguito, gli indici greci assumono i valori $0, 1, 2, 3$, quelli latini i soli valori $1, 2, 3$.

Conviene riferire la (1) ad un osservatore inerziale O, che si serva di una coordinata temporale $x_0 = ct$, essendo t il tempo misurato da un orologio normale, e di tre coordinate cilindriche r, θ, z per individuare una posizione del proprio spazio geometrico, che è euclideo. La metrica assume allora la seguente forma differenziale quadratica:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,d\theta^2 - dz^2\,. \tag{2}$$

Posto $r \equiv x_1$, $\theta \equiv x_2$, $z \equiv x_3$, nel sistema di riferimento (2) si deduce, per le componenti covarianti del tensore fondamentale:

$$g_{00} = 1\,,\quad g_{11} = -1\,,\quad g_{22} = -r^2\,,\quad g_{33} = -1\,,\quad g_{\lambda\sigma} = 0 \qquad (\lambda \neq \sigma) \tag{3}$$

da cui:

$$g^{00} = 1\,,\quad g^{11} = -1\,,\quad g^{22} = -r^{-2}\,,\quad g_{33} = -1\,,\quad g^{\lambda\sigma} = 0 \qquad (\lambda \neq \sigma)\,. \tag{4}$$

Per le (3) e le (4) e per la nota forma di derivazione covariante, la (1) diviene:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\,\psi = 0\,. \tag{5}$$

Come già nella teoria quantistica non relativistica, cerchiamo di soddisfare alla (5) assumendo:

$$\psi = \mathrm{F} e^{-\frac{2\pi i \mathrm{E}}{h} t}, \tag{6}$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria, la costante E l'energia totale del corpuscolo, F una funzione delle sole coordinate spaziali. Supponendo che il moto della particella avvenga in un piano perpendicolare alla direzione z, ossia:

$$z = \text{cost}, \tag{7}$$

riterremo:

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}(r, \theta); \tag{8}$$

r e θ costituiscono un sistema di coordinate polari del precedente piano.

Risulta inoltre [5]:

$$\mathrm{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9}$$

essendo $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$ la classica velocità tridimensionale del corpuscolo rispetto al riferimento inerziale introdotto e il punto simbolo di derivazione ordinaria rispetto all'unica variabile dalla quale la grandezza dipende.

La (5), per le (6) e (8), assume la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \theta^2} + \frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} - m^2 c^2\right) \mathrm{F} = 0. \tag{10}$$

2. Integrazione dell'equazione (10)

Vediamo se è possibile integrare la (10) assumendo:

$$\mathrm{F}(r, \theta) = \xi(r)\, \eta(\theta), \tag{11}$$

ossia ricorrendo al noto metodo di separazione delle variabili. La (10) stessa, per la (11), dopo alcuni calcoli diviene:

$$\frac{r}{\xi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r \dot{\xi}) + \frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} - m^2 c^2\right) r^2 = -\frac{\ddot{\eta}}{\eta}. \tag{12}$$

Poichè il primo membro della (12) dipende dalla sola r, mentre il secondo risulta funzione unicamente di θ, è necessario che ciascuno di essi uguagli una costante, che indichiamo con λ. Si ha così:

$$\ddot{\eta} + \lambda \eta = 0 \quad ; \quad \ddot{\xi} + \frac{\dot{\xi}}{r} + \left[\frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{c^2} - m^2 c^2\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right] \xi = 0. \tag{13}$$

Dalla prima delle (13) si trae:

$$\eta = \mathrm{A} \cos (\sqrt{\lambda}\, \theta + \gamma) \,, \tag{14}$$

con A e γ costanti disponibili. Poichè è necessario che η assuma un unico valore in ogni punto dello spazio, $\sqrt{\lambda}$ deve uguagliare un numero intero p, ossia:

$$\lambda = p^2 \,. \tag{15}$$

Inoltre dalla (9), dovendo essere $v < c$, segue: $\dfrac{\mathrm{E}^2}{c^2} - m^2 c^2 = \dfrac{m^2 v^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} > 0$.

Posto allora: $\dfrac{4\pi^2}{h^2}\left(\dfrac{\mathrm{E}^2}{c^2} - m^2 c^2\right) = \varepsilon^2$, la seconda delle (13), per la (15), si muta nella seguente:

$$\ddot{\xi} + \frac{\dot{\xi}}{r} + \left(\varepsilon^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) \xi = 0 \,. \tag{16}$$

L'equazione differenziale del secondo ordine (16) coincide con la nota equazione di Bessel, la quale possiede una singolarità fuchsiana per $r = 0$; infatti il coefficiente di $\dot{\xi}$ diviene infinito del primo ordine e quello di ξ del secondo. Assegnato l'intero p, si soddisfa ad essa assumendo:

$$\xi_p(r) = \mathrm{D}_p\, r^p \sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n (\varepsilon r)^{2n}}{2^{2n}\, n!\, (p+n)!} \,,$$

ossia:

$$\xi_p(r) = \frac{\mathrm{D}_p}{p!}\, r^p \left[1 - \frac{\varepsilon^2 r^2}{2\,(2p+2)} + \frac{\varepsilon^4 r^4}{2 \cdot 4\,(2p+2)\,(2p+4)} + \cdots\right] , \tag{17}$$

essendo D_p una costante a priori arbitraria.

3. OSSERVATORE UNIFORMEMENTE RUOTANTE RISPETTO ALL'OSSERVATORE INERZIALE O

Passiamo dall'osservatore inerziale O ad un osservatore O′ che ruota uniformemente con velocità angolare ω rispetto ad O. Ritenendo ω indipendente dai punti solidali con O′, questo osservatore può notoriamente avvalersi di coordinate spazio–temporali r', θ', z', t' legate a quelle già introdotte di O dalle seguenti formule di trasformazione:

$$r = r' \quad ; \quad \theta = \omega t' + \theta' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = t' \,. \tag{18}$$

Grazie alle (18) e alla (2), la metrica dello spazio–tempo pseudoeuclideo, nel nuovo sistema di riferimento, assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} r'^2\right) c^2\, dt'^2 - 2\,\omega r'^2\, dt'\, d\theta' - dr'^2 - r'^2\, d\theta'^2 - dz'^2 \,. \tag{19}$$

Dalla (19) si trae che le componenti covarianti non nulle del tensore fondamentale di O' sono le seguenti:

$$g'_{00} = 1 - \frac{\omega^2}{c^2} r'^2 \quad ; \quad g'_{02} = -\frac{\omega}{c} r'^2 \; ; \tag{20}$$

$$g'_{11} = -1 \quad ; \quad g'_{22} = -r'^2 \quad ; \quad g'_{33} = -1 \, .$$

La metrica dl'^2 dello spazio geometrico tridimensionale di O' è fornita dalla espressione differenziale quadratica:

$$dl'^2 = \gamma'_{ik} \, dx'^i \, dx'^k \, , \tag{21}$$

con:

$$\gamma'_{ik} = -g'_{ik} + \frac{g'_{0i} \, g'_{0k}}{g'_{00}} \, . \tag{21'}$$

Per le (20), dalla (21) si trae:

$$dl'^2 = dr'^2 + \frac{r'^2}{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r'^2} \, d\theta'^2 + dz'^2 \, . \tag{22}$$

La funzione di stato (6), per le (11), (14), (15), (17), (18) e (7), nel nuovo sistema di riferimento spazio–temporale diviene:

$$\psi = A \cos \left[p (\theta' + \omega t') + \gamma \right] \xi_p(r') \, e^{-\frac{2\pi i E}{h} \cdot t'} \, , \tag{23}$$

essendo:

$$\xi_p(r') = \frac{D_p}{p!} r'^p \left[1 - \frac{\varepsilon^2 r'^2}{2(2p+2)} + \frac{\varepsilon^4 r'^4}{2 \cdot 4 (2p+2)(2p+4)} + \cdots \right] . \tag{24}$$

La serie (24) risulta, come si verifica facilmente, convergente per qualunque valore di r'. Per r' abbastanza grande rispetto a p/ε, la funzione $\xi_p(r')$ assume la forma asintotica:

$$\xi_p(r') \simeq \frac{2^p D_p}{\varepsilon^p} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon \pi r'}} \cos \left(\varepsilon r' - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi p}{2} \right) \qquad [6]. \tag{25}$$

La (25) mostra che le funzioni $\xi_p(r')$ tendono a zero, oscillando, al tendere di r' all'infinito e che l'intervallo fra due zeri consecutivi al crescere di r' tende al valore finito $\frac{\pi}{\varepsilon}$.

Osserviamo che la misura della densità di probabilità che possiede la particella di occupare, ad un determinato istante t', una assegnata posizione dello spazio di O' è fornita, per la (23) e la (24), da:

$$\psi\psi^* = B_p^2 \cos^2 \left[p (\theta' + \omega t') + \gamma \right] r'^{2p} \left[1 - \frac{\varepsilon^2 r'^2}{2(2p+2)} + \frac{\varepsilon^4 r'^4}{2 \cdot 4 (2p+2)(2p+4)} + \cdots \right]^2 , \tag{26}$$

con $B_p^2 \equiv \dfrac{A^2 D_p^2}{(p!)^2}$.

Per la (26), possiamo affermare che vi è la probabilità, se si compie una osservazione di posizione, di trovare il corpuscolo anche nella regione $r' > c/\omega$. Secondo la Meccanica relativistica non quantistica, tale regione risulta invece inaccessibile alla particella. Infatti, per $r' > c/\omega$, dalla prima delle (20) si deduce $g'_{00} < 0$ e risulta inoltre definita negativa la metrica (22) dello spazio geometrico; di conseguenza la velocità di qualsiasi corpuscolo risulta ivi immaginaria.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. SCHIFF, *Meccanica Quantistica*, traduzione di L. A. RADICATI DI BROZOLO, p. 443, Torino 1959.

[2] C. VENINI, *Osservatore ruotante rispetto ad un osservatore inerziale in Relatività*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *41*, 300 (1966).

[3] B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e Applicazioni*, p. 437, Bologna 1961.

[4] E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica atomica*, p. 145, Bologna 1936.

[5] P. CALDIROLA, *Lezioni di Fisica teorica*, vol. I, p. 205, Milano.

[6] E. PERSICO, *Introduzione alla Fisica Matematica*, p. 183, Bologna 1947.