Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giannantonio Pezzoli

Perturbazioni impulsive in bacini di profondità limitata. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 712–719.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_712_0>

Idrodinamica. — *Perturbazioni impulsive in bacini di profondità limitata.* Nota I di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In this work we have resumed already studied arguments, proceeding with a complete treatment of impulsive plane waves in a limited depth.

The first part, which we are introducing, shows that the behaviour of the above waves is practically similar to the behaviour of waves in an infinite depth.

1. La teoria delle perturbazioni impulsive in bacini di profondità illimitata è stata studiata, ed i relativi problemi risolti esattamente o con varie approssimazioni in numerose Memorie [1]···[10].

In acqua di profondità limitata, nello schema di moto piano, irrotazionale, di liquido perfetto, un tentativo di Lord Rayleigh [11] si fermò alla terza approssimazione (primo termine non nullo) relativamente ad un assegnato sviluppo in serie, sempre per onde ad energia iniziale infinita, mentre G. Scarpi, di recente, ha affrontato [12] in modo approssimato lo studio di un particolare caso che riesamineremo più avanti.

In questa Nota ho ritenuto opportuno considerare dall'inizio la questione della propagazione di perturbazioni impulsive in bacini di profondità limitata, per alcuni casi che ritengo di particolare interesse.

Studiamo innanzitutto il caso classico di moto piano in un canale con acqua inizialmente ferma, in cui all'origine è assegnata un'intumescenza di volume finito e quindi di altezza (ed energia potenziale) finita.

Dovendo, per le cose dette, esistere un potenziale di velocità φ, assunto l'asse y positivo verso l'alto, per la condizione di Poisson sul pelo libero

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (\text{per } y = 0) \tag{1}$$

e per l'equazione di continuità

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

risulta notoriamente assegnata una soluzione particolare a variabili separate del tipo [3]:

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \operatorname{ch} k (h - y) \cos kx \tag{3}$$

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1972.

per cui sia inoltre:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (\text{per } y = h) \tag{3'}$$

essendo

$$\sigma^2 = gk \operatorname{tgh} kh \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{4}$$

e λ lunghezza d'onda generica.

La sopraelevazione η nell'onda, risulta dalla

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=0} \tag{5}$$

e, corrispondentemente alla (3) è data da:

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx\,. \tag{6}$$

Ora la soluzione particolare (3), (6) non soddisfa alle condizioni iniziali assegnate di liquido fermo ed orizzontale tranne un'intumescenza di sezione longitudinale rettangolare unitaria e di altezza finita all'origine delle x.

È possibile, data la linearità delle equazioni, soddisfare alle condizioni del problema, sommando infinite soluzioni del tipo (3) e (6) con un integrale di Fourier.

Essendo $\eta = f(x)$ per $t = 0$, si scrive immediatamente

$$\varphi = \frac{g}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\sin \sigma t}{\sigma} \operatorname{ch} k(h - y)\, dk \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \cos k(x - a)\, da\right] \tag{7}$$

e

$$\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\cos \sigma t\, dk \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \cos k(x - a)\, da\right]. \tag{8}$$

L'elevazione iniziale del pèlo libero è caratterizzata dalla relazione $\eta = f(x)$ per $t = 0$. Sarà:

$$\begin{cases} f(x) = A & \text{per } -\frac{\delta}{2} \leq x \leq \frac{\delta}{2} \\ f(x) = 0 & \text{per } \begin{cases} -\infty < x < -\frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} < x < \infty\,. \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

Porremo inoltre

$$A\delta = 1 \qquad (A \text{ e } \delta \text{ costanti}) \tag{10}$$

per rendere unitaria la sezione longitudinale dell'intumescenza iniziale; l'energia potenziale sarà quindi proporzionale a $1/\delta$.

Ne consegue che la (7) e la (8) divengono:

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{g}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left[\dfrac{\sin \sigma t}{\sigma} \operatorname{ch} k(h-y)\, dk \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A \cos k(x-a)\, da \right] \\ \eta = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left[\cos \sigma t\, dk \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A \cos k(x-a)\, da \right] \end{cases}$$

che integrate una prima volta, e tenuto conto della (10) danno:

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{2g}{\delta\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin \sigma t}{\sigma k} \operatorname{ch} k(h-y) \cos kx \sin \dfrac{k\delta}{2}\, dk \\ \eta = \dfrac{2}{\delta\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos \sigma t}{k} \cos kx \sin \dfrac{k\delta}{2}\, dk\,. \end{cases}$$

Considerando ora l'equazione che fornisce η, e sviluppando in serie $\cos \sigma t$, si ottiene:

$$\text{(13)}\qquad \eta = \frac{2}{\delta\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2!} + \dfrac{\sigma^4 t^4}{4!} \cdots}{k} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2}\, dk$$

vale a dire

$$\text{(14)}\qquad \eta = \frac{2}{\delta\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^n (\sigma t)^{2n}}{(2n)!\, k} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2}\, dk$$

che ricordata l'espressione (4) di σ^2, si trasforma in:

$$\text{(15)}\qquad \eta = \frac{2}{\delta\pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^n g^n k^{n-1} \operatorname{tgh}^n kh \cdot t^{2n}}{(2n)!} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2}\, dk$$

tenuto conto che per $n = 0$ l'integrale è notoriamente nullo [10]. Ma nella formula (15), solo il primo termine della serie risente della presenza del parametro h, in quanto per $n > 1$, la funzione $f(k) = k^{n-1} \operatorname{tgh}^n kh$, può essere approssimata da k^{n-1} in tutto il campo di integrazione con un errore $\varepsilon(f)$ che è $|\varepsilon(f)| < \frac{1}{20} n$ e che data la presenza di $(2n)!$ al denominatore porta l'errore su ogni termine ad un ordine di grandezza $|\varepsilon_n| < \frac{1}{20} \frac{n}{(2n)!}$, per cui la (15) stessa si può scrivere:

$$\eta = -\frac{2}{\delta\pi}\int_0^\infty \frac{gt^2 \operatorname{tgh} kh}{2} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2} \, dk + \tag{16}$$

$$+ \frac{2}{\delta\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \frac{(-1)^n g^n k^{n-1} t^{2n}}{(2n)!} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2} \, dk +$$

$$+ \frac{2}{\delta\pi}\int_0^\infty \frac{gt^2}{2} \cos kx \sin \frac{k\delta}{2} \, dk \, .$$

Nella formula (16) restano pertanto da valutare tre termini costituiti da due integrali definiti ed una serie formata a sua volta da una somma di integrali definiti su intervallo illimitato a destra; per brevità scriveremo:

$$\eta = -I_1 + I_2 + I_3 \, . \tag{17}$$

La serie è stata sommata in [8] e senza riportare il laborioso procedimento, si ricorda che è:

$$I_2 = \frac{1}{\delta}\left\{ C^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right] - C^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right] + \right. \tag{18}$$

$$\left. + S^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right] - S^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]\right\}$$

dove C ed S rappresentano le funzioni integrali di Fresnel, mentre l'ultimo integrale, pure calcolato nel predetto lavoro vale:

$$I_3 = \frac{1}{x\pi}\,\frac{gt^2}{2x}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\delta}{2x}\right)^2} \, . \tag{18}$$

Resta quindi da calcolare:

$$I_1 = \frac{gt^2}{\delta\pi}\int_0^\infty \operatorname{tgh} kh \cos kx \sin \frac{k\delta}{2} \, dk \tag{19}$$

che scritto nella forma

$$I_1 = \frac{gt^2}{2\pi\delta}\left[\int_0^\infty \operatorname{tgh} kh \sin k\left(x+\frac{\delta}{2}\right) dk - \int_0^\infty \operatorname{tgh} kh \sin k\left(x-\frac{\delta}{2}\right) dk\right] \tag{20}$$

posto $\qquad kh = \pi z \quad$ e $\quad c = \pi\,\dfrac{x \pm \delta/2}{h}$

si riduce alla valutazione di due integrali del tipo

$$\int_0^\infty \operatorname{tgh} \pi z \sin cz \, dz = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} c/2} \tag{21}$$

da cui, con ovvii passaggi:

$$I_1 = \frac{gt^2}{4h\delta} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x+\delta/2}{h}\right)} - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-\delta/2}{h}\right)} \right]. \tag{22}$$

La soluzione generale del problema, si può pertanto scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta \cdot \eta = {} & \pi \frac{gt^2}{2x} \frac{x}{h} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x-\delta/2}{h}\right)} - \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} \frac{x+\delta/2}{h}\right)} \right] + \\ & + 2\pi \left\{ C^2 \left[\frac{gt^2}{4x} \left(1 + \frac{\delta}{2x}\right) \right] - C^2 \left[\frac{gt^2}{4x} \left(1 - \frac{\delta}{2x}\right) \right] + \right. \\ & \left. + S^2 \left[\frac{gt^2}{4x} \left(1 + \frac{\delta}{2x}\right) \right] - S^2 \left[\frac{gt^2}{4x} \left(1 - \frac{\delta}{2x}\right) \right] \right\} + \\ & + 2 \frac{\delta}{x} \frac{gt^2}{2x} \frac{1}{1 - \left(\frac{\delta}{2x}\right)^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Questa formula che risolve il problema posto con grandissima approssimazione, mostra che l'influenza della profondità dell'acqua sul fenomeno perturbatorio impulsivo è pressoché trascurabile, in quanto l'importanza relativa del primo termine fra parentesi quadra è modestissima e a distanza assai piccola dall'origine l'onda non risente più dell'effetto della profondità, ma si comporta sempre come se si trovasse in profondità infinita.

2. Non è facile tuttavia dalla (23) rendersi conto dell'influenza di h e dei limiti di questa influenza, mentre, procedendo in modo diverso, si può giungere ad una formula altrettanto soddisfacente ma in cui si possono assegnare limiti di validità per due diversi tipi di soluzione che tengono conto in maniera più precisa di quanto è stato detto sopra.

I vantaggi del nuovo procedimento sono anche costituiti dal fatto di poter fornire formule più maneggevoli e facilmente calcolabili.

Ripresa quindi la (II^a) delle (12), e posto:

$$\left\{ \begin{aligned} & kh = z \\ & \sigma^2 = \frac{g}{h} z \operatorname{tgh} z = \frac{g}{h} \bar{\sigma}^2. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

L'equazione in parola si può scrivere:

$$\eta = \frac{1}{2\pi\delta}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\sin\left(\frac{\delta}{2h}z - t\sqrt{\frac{g}{h}}\,\bar{\sigma} + \frac{x}{h}z\right) + \right. \tag{25}$$

$$+ \sin\left(\frac{\delta}{2h}z + t\sqrt{\frac{g}{h}}\,\bar{\sigma} - \frac{x}{h}z\right) + \sin\left(\frac{\delta}{2h}z - t\sqrt{\frac{g}{h}}\,\bar{\sigma} - \frac{x}{h}z\right) +$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\delta}{2h}z + t\sqrt{\frac{g}{h}}\,\bar{\sigma} + \frac{x}{h}z\right)\right].$$

A questa relazione può essere convenientemente applicato il metodo della « fase stazionaria » per la valutazione degli integrali che compaiono nella (25).

Senza entrare nei dettagli del metodo, si ricorda che esso riconduce la valutazione di un integrale definito del tipo:

$$u = \int_a^b \varphi(x)\, e^{if(x)}\, dx \tag{26}$$

all'equazione:

$$u = \sum_j \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\alpha_j)|}}\;\varphi(\alpha_j)\; e^{i[f(\alpha_j)\pm\pi/4]} \tag{27}$$

dove le α_j sono le radici dell'equazione

$$f'(x) = 0$$

che non annullino la $f''(x)$.

In caso che questo avvenga, occorre aggiungere altri termini in cui compare la $f'''(\alpha)$; si ricorda che il segno di $\pi/4$ nella (27) deve essere lo stesso di $f''(\alpha)$.

Per poter valutare gli integrali che compaiono in (25) col metodo anzidetto, bisogna poter esplicitare z; ciò è possibile approssimando

$$\bar{\sigma} = \sqrt{z \operatorname{tgh} z}$$

con

$$\bar{\sigma}\begin{cases} \simeq z & 0 < z < 1/2 \\ \simeq 0{,}84\, z^{3/4} & 1/2 < z < 2 \\ \simeq z^{1/2} & 2 < z < \infty\,. \end{cases} \tag{28}$$

Nella (25) le funzioni argomento di seni hanno, per $0 < z < 1/2$, derivata prima costante rispetto a z, quindi in detto campo di integrazione il valore degli integrali è nullo.

Nel restante campo $1/2 < z < \infty$, non danno contributo i termini in cui le derivate prima degli argomenti dei seni non hanno radici positive; la (25) diventa perciò, tenuto conto delle (28):

$$\eta = \frac{1}{2\pi\delta}(\eta_1 + \eta_2) \tag{29}$$

essendo

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta_1 &= \int_{1/2}^{2} \frac{dz}{z} \left\{ \sin\left[\frac{z}{h}\left(x+\frac{\delta}{2}\right) - 0{,}84\, z^{3/4}\, t \sqrt{\frac{g}{h}}\right] - \right. \\ &\left. - \sin\left[\frac{z}{h}\left(x-\frac{\delta}{2}\right) - 0{,}84\, z^{3/4}\, t \sqrt{\frac{g}{h}}\right]\right\} \\ \eta_2 &= \int_{2}^{\infty} \frac{dz}{z} \left\{ \sin\left[\frac{z}{h}\left(x+\frac{\delta}{2}\right) - z^{1/2}\, t \sqrt{\frac{g}{h}}\right] - \right. \\ &\left. - \sin\left[\frac{z}{h}\left(x-\frac{\delta}{2}\right) - z^{1/2}\, t \sqrt{\frac{g}{h}}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

L'applicazione della (27) a questo punto è banale, e fornisce, con qualche passaggio:

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{4\pi}{\dfrac{gt^2}{x}\left(\dfrac{h}{x}\right)^{1/2}} \left\{ \left(1+\frac{\delta}{2x}\right)^{3/2} \sin\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{gt^2}{x}\right)^2 \frac{0{,}052}{\dfrac{x}{h}\left(1+\dfrac{\delta}{2x}\right)^3}\right] - \right. \\ &\left. - \left(1-\frac{\delta}{2x}\right)^{3/2} \sin\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{gt^2}{x}\right)^2 \frac{0{,}052}{\dfrac{x}{h}\left(1-\dfrac{\delta}{2x}\right)^3}\right]\right\} \\ \eta_2 &= \frac{4\sqrt{\pi}}{\left(\dfrac{gt^2}{x}\right)^{1/2}} \left\{ \left(1+\frac{\delta}{2x}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\, \frac{gt^2}{x\left(1-\dfrac{\delta}{2x}\right)}\right] - \right. \\ &\left. - \left(1-\frac{\delta}{2x}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\, \frac{gt^2}{x\left(1-\dfrac{\delta}{2x}\right)}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

È immediato ovviamente assegnare anche il campo di validità delle (31); per la prima, essendo la definizione di z data da $\frac{1}{2}\left(\frac{gt^2}{x}\right)^2\left(\frac{h}{x}\right)^2$ risulta:

$$(32)\qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{gt^2}{x}\right)^2\left(\frac{h}{x}\right)^2 < 2$$

da cui:

$$(33)\qquad 1 < \frac{gt^2}{x}\cdot\frac{h}{x} < 2\,.$$

Per la 2ª delle (31) z è definita da $\frac{gt^2}{x}\cdot\frac{h}{x}$; ne segue quindi che l'intervallo di validità di η_2 è dato da:

$$(34)\qquad 2 < \frac{gt^2}{x}\,\frac{h}{x} < \infty\,.$$

In sostanza nelle (23) i due termini a secondo membro sono nulli, alternativamente, l'uno o l'altro, in ciascuno dei due campi di valori assegnati; anche questa soluzione conferma la pratica indipendenza di η da h.

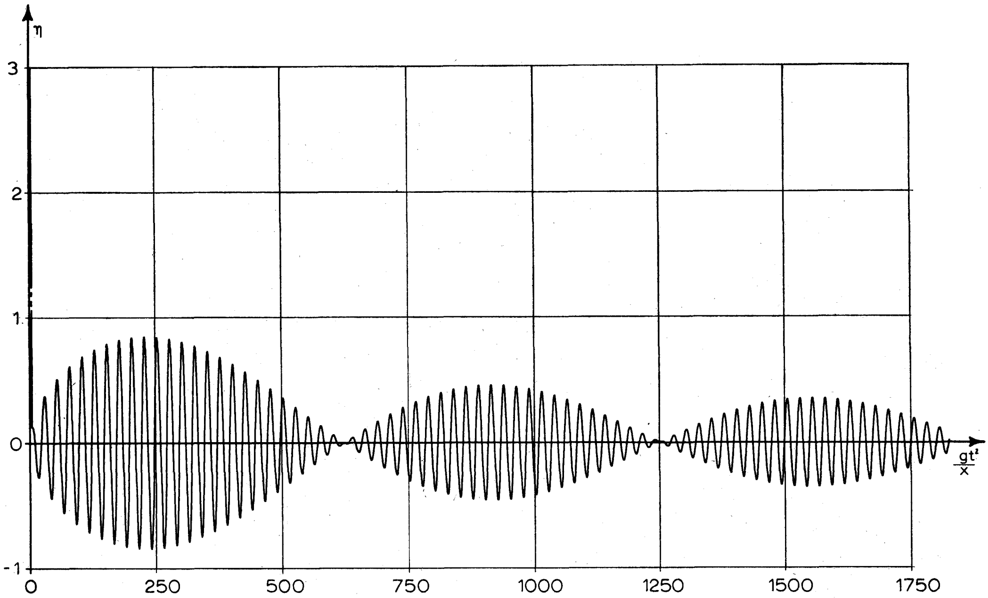

Fig. 1.

In fig. 1 è riportato l'andamento di η per un valore plausibile sufficientemente piccolo di δ: in essa il tratteggio raccorda le due soluzioni η_1 ed η_2; il raccordo è comunque soddisfacente: si nota inoltre la pressoché trascurabile importanza di η_1, limitata ai primissimi istanti del moto stesso.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CAUCHY, *Mémoires sur la théorie des ondes*, «Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences» (1827).

[2] S.D. POISSON, *Mémoire sur la théorie des ondes*, «Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences» (1816).

[3] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, sixth edition.

[4] W. THOMSON (Lord KELVIN), *On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium*, Papers (1887).

[5] I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill (1951).

[6] J. J. STOKER, *Water waves*, Interscience publishers (1957).

[7] J. O. HINZE, *Die Erzeungung von Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche durch periodisch wirkende Druckkräfte*, «Zeitschrift für ang. Math. und Mech.», *16* (1936).

[8] S. UNOKI e M. NAKANO, *On the Cauchy-Poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano*, «Oceanographical Magazine», *3* paper (1953).

[9] N. W. MCLACHLAN, *Complex variable and operational calculus with technical applications.*

[10] G. PEZZOLI, *Sulla teoria delle onde d'emersione e d'impulso. Una soluzione rigorosa ad energia finita del problema di Cauchy e Poisson per moto piano*, questi «Rend.», *38* (5), 660–669 (1965).

[11] J. W. STRUTT (Lord RAYLEIGH), *On the instantaneous propagation of disturbance in a dispersive medium, examplified by waves on water deep and shallow*, «Phylosophical Magazine», *18* (1909).

[12] G. SCARPI, *Onde provocate da uno spostamento istantaneo di una parete verticale*, XI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Genova, ottobre 1968.