Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Froim Marcus

## Su un risultato di A. Terracini e sulle superfici non rigate tali che le sviluppabili delle congruenze K coniugate e K' armoniche si corrispondono

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **52** (1972), n.5, p. 698–701.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_698_0>

**Geometria.** — *Su un risultato di A. Terracini e sulle superfici non rigate tali che le sviluppabili delle congruenze* K *coniugate e* K′ *armoniche si corrispondono.* Nota di FROIM MARCUS, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

RÉSUMÉ. — On démontre quelques proprietés d'une classe de surfaces de $S_3$ obtenues par A. Terracini, et qui sont les seules surfaces dont les asymptotiques et leurs lignes de Darboux sont les projections des lignes principales d'une surface de l'espace $S_5$, douées de deux centres de projections paraboliques.

1. Nel secondo paragrafo del suo lavoro « *Superficies con proyecciones parabolicas* » [1] A. Terracini determina *le superfici dello spazio ordinario che si possono considerare come proiezione di una superficie* S *dello spazio* $S_5$ *dotata di due centri di proiezione parabolica* $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$, *mediante la retta* $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ *tale che le asintotiche come le loro linee di Darboux siano le proiezioni delle linee principali della* S.

Se con notazioni usuali

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} x_{uu} &= \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x, \end{aligned} \qquad \beta\gamma \neq 0,$$

è il sistema che determina una superficie riferita alle asintotiche, e

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &L_v + 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0 \quad ; \quad M_u + 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0, \\ &\beta M_v + 2 M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2 L\gamma_u + \gamma_{uuu}, \end{aligned}$$

dove

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2 p_{11}; \\ M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2 p_{22}, \end{aligned}$$

sono le condizioni d'integrabilità del sistema (1.1), il risultato di Terracini si enuncia così:

*Scegliendo in modo opportuno i parametri asintotici, le superfici della classe considerata risultano definite dalle relazioni*:

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &3\beta_{vv} + 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0, \\ &3\gamma_{uu} + 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0, \\ &\beta\gamma_{uv} = \gamma\beta_{uv}, \end{aligned}$$

*alle quali si devono anche aggregare le espressioni di* L *e* M *per mezzo di* $\beta, \gamma$,

$$(1.5)\qquad L = 3\beta_v \quad ; \quad M = 3\gamma_u .$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

Come esempio di superfici di $S_3$ che realizzano le condizioni richieste, Terracini indica le superfici di coincidenza e le superfici di Čech a linee di Darboux piane [2].

Mi propongo di mostrare in questa Nota, come si possono ottenere queste superfici che chiameremo superfici $\Sigma$, senza uscire dallo spazio $S_3$ e di far vedere qualche altra loro proprietà.

Per questo ricordiamo alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale.

a) Secondo Fubini–Čech [2] *le sviluppabili di una congruenza* K *coniugata e* K′ *armonica ad una superficie non rigata si corrispondono se*

$$\pi_{11} : p_{11} = \pi_{22} : p_{22}, \tag{1.6}$$

*dove*

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta\theta_v + \beta_v \quad ; \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma\theta_u + \gamma_u . \tag{1.7}$$

b) Secondo Bompiani [2] (Appendice II), *due superfici non quadriche sono in corrispondenza proiettivo–simile se gli elementi lineari proiettivi di Fubini corrispondenti, sono in un rapporto costante* $k \neq 0, \pm 1$.

c) Il seguente risultato è stato dimostrato da Octav Mayer [3].

*Le superfici che ammettono corrispondenze proiettivo – simili sono quelle che in parametri asintotici opportunamente scelti, verificano l'equazione*

$$\beta_{vvv} - \gamma_{uuu} = 0. \tag{1.8}$$

## Qualche altra proprietà delle superfici $\Sigma$

2. Mostreremo prima di tutto che la terza condizione del sistema (1.4)+(1.5) ottenuto in [1], è una conseguenza della prime due condizioni di (1.4) e delle condizioni (1.5).

Infatti dalla terza condizione d'integrabilità (1.3) e dalle condizioni (1.5) risulta

$$3\,\beta\gamma_{uv} + \beta_{vvv} = 3\,\gamma\beta_{uv} + \gamma_{uuu}, \tag{2.1}$$

e calcolando $\beta_{vvv}$ e $\gamma_{uuu}$ dalle prime due condizioni (1.4), ed introducendo i risultati in (2.1) si trova proprio la condizione

$$\beta\gamma_{uv} = \gamma\beta_{uv} . \tag{2.2}$$

Ciò dimostra che per la determinazione delle superfici $\Sigma$ è *sufficiente il sistema*:

$$\begin{gathered} 3\,\beta_{vv} + 2\,\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0, \\ 3\,\gamma_{uu} + 2\,\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0, \\ L = 3\,\beta_v \quad ; \quad M = 3\,\gamma_u . \end{gathered} \tag{2.3}$$

Un'altra conseguenza si ottiene dal sistema (2.3). Infatti tenendo conto di (2.2) risulta dalla condizione (2.1) che $\beta$ e $\gamma$ debbono soddisfare l'equazione

$$\beta_{vvv} - \gamma_{uuu} = 0 , \tag{2.4}$$

e per il risultato di Mayer sopra ricordato risulta la seguente proprietà di queste superfici:

*Le superfici* $\Sigma$ *ammettono corrispondenze proiettivo-simili.*

Questa proprietà non è caratteristica. Un'altra proprietà di queste superfici si ottiene così.

Sia $(x)$ una superficie $\Sigma$ determinata dal sistema (2.3). Normalizziamo le coordinate $x$ nel senso di Wilczynski. In conseguenza

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v \quad ; \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u , \tag{2.5}$$

ed essendo $L = 3\,\beta_v$ , $M = 3\,\gamma_u$ si deduce da (1.3)

$$\begin{aligned} p_{11} &= -2\,\beta_v \quad ; \quad p_{22} = -2\,\gamma_u , \\ \pi_{11} &= -\beta_v \quad ; \quad \pi_{22} = -\gamma_u . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Perciò

$$\pi_{11} : p_{11} = \pi_{22} : p_{22} = \frac{1}{2} . \tag{2.7}$$

*Ciò vuol dire che le sviluppabili delle congruenze* $(x , x_{uv})$ *e* $(x_u , x_v)$, *la prima coniugata e la seconda armonica alle superfici* $\Sigma$, *si corrispondono.* Oppure in un altro modo:

*In coordinate di Wilczynski, fra le terze forme differenziali* $P = p_{11}\, du^2 + p_{22}\, dv^2$ e $\Pi = \pi_{11}\, du^2 + \pi_{22}\, dv^2$ *di una superficie* $\Sigma$, *si ha la relazione* $P = 2\,\Pi$.

È facile mostrare che queste due proprietà *sono caratteristiche della superficie* $\Sigma$. Infatti sia $(x)$ una superficie riferita alle asintotiche. Supponiamo le coordinate $x$ normate nel senso di Wilczynski e che si abbia in questo sistema di coordinate

$$p_{11} = 2\,\pi_{11} \quad ; \quad p_{22} = 2\,\pi_{22} . \tag{2.8}$$

Dalle espressioni di $\pi_{11}$ e $\pi_{22}$ si deduce in questo caso

$$p_{11} = -2\,\beta_v \quad ; \quad p_{22} = -2\,\gamma_u . \tag{2.9}$$

In conseguenza

$$L = 3\,\beta_v \quad ; \quad M = 3\,\gamma_u , \tag{2.10}$$

e ciò dimostra che $(x)$ è una superficie $\Sigma$. Si ha dunque il sequente risultato:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia del tipo* $\Sigma$ *è che in coordinate di Wilczynski, le due terze forme differenziali della superficie,* $P$ e $\Pi$, *soddisfano la condizione* $P = 2\,\Pi$.

3. Questo risultato si può generalizzare. Infatti supponiamo che in coordinate di Wilczynski si abbia tra le due terze forme differenziali P e $\Pi$ di una superficie, la relazione $P = k\Pi$ con $k$ costante $\neq 0, \pm 1$. Dunque

$$\pi_{11} : p_{11} = \pi_{22} : p_{22} = k, \tag{3.1}$$

e conseguentemente

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\beta_v}{k-1} \quad ; \quad p_{22} = \frac{\gamma_u}{k-1}, \\ L &= -\frac{k+1}{k-1}\beta_v \quad ; \quad M = -\frac{k+1}{k-1}\gamma_u . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dalle prime due condizioni d'integrabilità (1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{k-1}\beta_{vv} &= 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u, \\ \frac{k+1}{k-1}\gamma_{uu} &= 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v, \end{aligned} \tag{3.3}$$

e dalla terza si deduce

$$\beta\gamma_{uv} = \gamma\beta_{uv}. \tag{3.4}$$

In conseguenza

$$\beta_{vvv} - \gamma_{uuu} = 0. \tag{3.5}$$

*Dunque queste superfici ammettono corrispondenze proiettivo-simili e le sviluppabili delle congruenze* $(x, x_{uv})$ e $(x_u, x_v)$ *si corrispondono*. Queste superfici esistono. Un esempio di tale superficie si ottiene con:

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma = \sqrt{c}\,\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\sqrt{c}\,\frac{k-1}{k+1}\,\tau, \\ L &= M = -\frac{3c}{2\cos^2 \frac{3}{2}\sqrt{c}\,\frac{k-1}{k+1}\,\tau}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

con $\tau = u + v$ e $c$ costante arbitraria. Per $k = \frac{1}{2}$ si ottengono le superfici $\Sigma$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] A. TERRACINI, *Superficies con proyecciones parabolicas*, « Revista de Matem. y Fis. Teor, Tucumán », *1* y *2* (1940); oppure: A. TERRACINI, *Selecta*, vol. II, p. 397, ed. Cremonese. Roma, 1968.

[2] G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, N. Zanichelli, Bologna 1926.

[3] O. MAYER, *Sur les similitudes projectives*, *Analele*, « Ştiinţifice ale Universităţii Al. I. Cuza din Jaşi », *10*, 357-376 (1964).