Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Delfina Roux, Paolo Soardi

Alcune generalizzazioni del Teorema di Browder-Göhde-Kirk

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 682–688.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_682_0>

Analisi funzionale. — *Alcune generalizzazioni del Teorema di Browder–Göhde–Kirk.* Nota di DELFINA ROUX e PAOLO SOARDI (*), presentata (**) dal Corrisp. G. RICCI.

SUMMARY. — In this paper we are concerned with applications f, mapping into itself a closed convex subset K of a normed space X, with the property:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq a\{\|x - f(x)\| + \|y - f(y)\|\} + b\|x - y\|$$

(a, b not necessarily constants, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $2a + b \leq 1$).

We prove that a fixed point of f exists in K under the following assumptions:

1) X is uniformly convex and in K there exists a point with bounded orbit;

2) X is a Banach space, K is weakly compact, f is continuous and $\sup\limits_{x,y \in k} b(x, y) < 1$.

Thereafter, if X is strictly convex, we prove that the set of all fixed points of f in K is closed and convex.

1. – Sia f un'applicazione che muta in sè un insieme K chiuso e convesso di uno spazio normato X e tale che

$$(1.1) \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq a\{\|x - f(x)\| + \|y - f(y)\|\} + b\|x - y\| \quad \forall x, y \in K$$

con a, b non necessariamente costanti, $a \geq 0$, $b \geq 0$, e $2a + b \leq 1$.

Se X è uno spazio di Banach uniformemente convesso e K è limitato, è noto che f ha in K almeno un punto unito qualora sia $a = 0$ (1), oppure $b = 0$ (2). In questa Nota si dimostra l'esistenza di un punto unito per f qualunque siano a e b, nell'ipotesi che esista in K un punto con orbita limitata.

Viene inoltre provata l'esistenza di un punto unito se K è un insieme debolmente compatto e convesso in uno spazio di Banach, qualora f sia continua e $\sup\limits_{x,y \in k} b(x, y) < 1$; si estende così un risultato noto nel caso $a = 1/2$ (3).

Se X è strettamente convesso, vengono anche date informazioni sulla struttura dell'insieme dei punti uniti; diviene così possibile estendere alle applicazioni soddisfacenti la (1.1) proprietà note di famiglie commutative di mappe non espansive (4).

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

(1) [1], Teorema 1 e [3], p. 256; vedasi anche [4].

(2) [5], Teorema III; vedasi anche [6], Corollario II.

(3) [6], Teorema III.

(4) Vedasi [1], Teorema 2.

2. – Siano, qui e nel seguito: X vettoriale normato; $K \subseteq X$ chiuso e convesso; $f: K \to K$ soddisfacente la condizione seguente:

(A) esistono due funzioni reali non negative $a(x, y)$ e $b(x, y)$ definite in $K \times K$ e tali che per ogni coppia x, y di punti di K risulti:

$$2a(x, y) + b(x, y) \leq 1,$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq a(x, y)\{\|x - f(x)\| + \|y - f(y)\|\} + b(x, y)\|x - y\| \quad (5).$$

Da (A) si ricava facilmente che f soddisfa la limitazione:

$$\|f^{n+1}(x) - f^n(x)\| \leq \|f^n(x) - f^{n-1}(x)\| \tag{2.1}$$

per ogni $n > 0$ e per ogni $x \in K$.

Se $a(x, y)$ è identicamente nulla in K, f è non espansiva, quindi continua; in generale f non è necessariamente non espansiva e neanche continua (6).

Se $b(x, y) < 1$ per ogni coppia x, y di punti di K, un eventuale punto unito di f in K è necessariamente unico; in generale f può avere più di un punto unito in K.

Introduciamo le notazioni seguenti. Sia $A \subseteq K$; denotiamo con $\bar{A}$ la chiusura di A, con $\overline{co}\,A$ la sua chiusura convessa, con $\delta(A)$ il suo diametro. Inoltre, per ogni $x \in K$ sia $O(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{f^n(x)\}$ e $r(x) = \delta(O(x))$.

Vale il seguente

Lemma I. – *Per ogni* $x \in K$ *risulta*

$$r(x) = \sup_{n=0,1\cdots} \|x - f^n(x)\|. \tag{2.2}$$

Sia infatti $\delta = \sup_{n=0,1\cdots} \|x - f^n(x)\|$. Basta dimostrare che

$$\|f^n(x) - f^m(x)\| \leq \delta \qquad \forall n > 0 \quad \text{e} \quad \forall m > n. \tag{2.3}$$

La (2.3) è vera per $n = 0$; procediamo per induzione da n a $n + 1$. Da (2.1) si ricava

$$\|f(x) - f^{n+1}(x)\| \leq \|x - f(x)\| \leq \delta \qquad \forall n > 0.$$

Allora

$$\|f^n(x) - f^m(x)\| \leq a(f^{m-1}(x), f^{n-1}(x))\{\|f^{n-1}(x) - f^n(x)\| + \|f^{m-1}(x) - f^m(x)\|\} +$$
$$+ b(f^{m-1}(x), f^{n-1}(x))\|f^{n-1}(x) - f^{m-1}(x)\| \leq \delta.$$

Poniamo ora $C_0(x) = O(x)$ e, per ogni $n > 0$

$$C_n(x) = \overline{co}\, f(C_{n-1}(x)).$$

(5) È evidente che si può sempre supporre a e b funzioni simmetriche dei loro argomenti.

(6) Vedasi ad esempio [5], p. 842.

Vale il

LEMMA II. – *Qualunque sia* $n \geq 0$ *risulta*

$$\delta(C_n(x) \cup C_{n+1}(x)) \leq r(x). \tag{2.4}$$

Se $n = 0$, la (2.4) è ovvia. Procediamo per induzione: (2.4) sia valida per ogni $m < n$ e dimostriamo che essa vale anche per n. Basterà dimostrare che

$$\delta(C_n(x) \cup f(C_n(x))) \leq r(x). \tag{2.5}$$

Sia $y \in C_n(x)$: allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $y_1, \cdots, y_k \in C_{n-1}(x)$ e $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, tali che $\left\| y - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(y_i) \right\| < \varepsilon$.

Ne segue

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \left\| f(y) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(y_i) \right\| + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a(y, y_i) \{\|y - f(y)\| + \|y_i - f(y_i)\|\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b(y, y_i) \|y - y_i\| + \varepsilon \end{aligned}$$

da cui, posto $a' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a(y, y_i)$, $b' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b(y, y_i)$, essendo $\delta(C_n(x) \cup C_{n-1}(x)) \leq$ $\leq r(x)$, si ricava

$$(1 - a') \|f(y) - y\| \leq (a' + b')\, r(x) + \varepsilon .$$

Ma $a' \leq 1/2$ e $a' + b' \leq 1 - a'$; per l'arbitrarietà di ε si ottiene allora

$$\|y - f(y)\| \leq r(x). \tag{2.6}$$

Sia $z \in C_n(x)$. Dalla condizione (A), ricordando che $\delta(C_n(x)) \leq r(x)$ e che (2.6) vale per ogni punto di $C_n(x)$, si ottiene facilmente che $\|f(y) -$ $- f(z)\| \leq r(x)$ e quindi

$$\delta(f(C_n(x))) \leq r(x). \tag{2.7}$$

Infine si ha

$$\begin{aligned} \|f(z) - y\| &\leq \left\| f(z) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(y_i) \right\| + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a(z, y_i) \{\|z - f(z)\| + \|y_i - f(y_i)\|\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, b(z, y_i) \|z - y_i\| + \varepsilon \\ &\leq r(x) + \varepsilon . \end{aligned}$$

Di qui e da (2.7), essendo $\delta(C_n(x)) \leq r(x)$, segue (2.5).

Dal Lemma II, osservando che $f^n(x) \in C_n(x)$, si ricava immediatamente il

COROLLARIO. – *Qualunque sia* $n \geq 0$ *e* $x \in K$ *risulta*

$$\delta(C_n(x)) \leq r(x)$$

e inoltre

$$\|x - y\| \leq 2\, r(x) \qquad \forall y \in C_n(x).$$

Poniamo ora

$$C(x) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{n=h}^{\infty} C_n(x).$$

Dalla definizione di $C_n(x)$ e dal Corollario precedente si ottiene facilmente il

LEMMA III. – *Se* $O(x)$ *è relativamente debolmente compatta,* $C(x)$ *è non vuoto, convesso e mutato in sè da* f. *Inoltre* $\delta(C(x)) \leq r(x)$ *e* $\|x - y\| \leq 2\, r(x)$ $\forall y \in C(x)$.

3. – Vale il seguente

TEOREMA I. – *Se* X *è uniformemente convesso e* K *contiene un punto con l'orbita limitata, esiste in* K *almeno un punto unito per* f.

Osserviamo preliminarmente che, per la uniforme convessità di X, è possibile determinare $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$ tale che in ogni convesso non vuoto limitato H esista un punto $y = y(H)$ per il quale vale

$$\sup_{z \in H} \|y(H) - z\| \leq \lambda\delta(H) \text{ (7)}. \tag{3.1}$$

Sia $x_0 \in K$ un punto con orbita limitata: allora $O(x_0)$ è relativamente debolmente compatta e $C(x_0) \neq \emptyset$. Poniamo, per ogni $n > 0$

$$x_n = y(C(x_{n-1})).$$

Per la (3.1) e per il Lemma III si ha

$$r(x_{n+1}) \leq \lambda r(x_n) \quad ; \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2\, r(x_n) \tag{3.2}$$

e quindi $r(x_n) \to 0$ e $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Sia x il suo limite. Poichè $\|x_n - f(x_n)\| \leq r(x_n)$, anche $\{f(x_n)\}$ converge a x. Si ha quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $n > n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \|x - f(x)\| &\leq \|x - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(x)\| \\ &\leq \varepsilon + a(x_n, x)\{\|x - f(x)\| + \|x_n - f(x_n)\|\} + \\ &\quad + b(x_n, x)\,\|x - x_n\| \\ &\leq a(x_n, x)\,\|x - f(x)\| + 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, essendo $a(x_n, x) \leq 1/2$, segue $x = f(x)$.

(7) Infatti, sia $1 > \gamma > 0$ e $x, y \in H$ tali che $\|x - y\| \geq \gamma\delta(H)$. Posto $x_1 = \frac{1}{2}(x + y)$, risulta $\sup_{z \in H} \|z - x_1\| \leq \lambda \cdot \delta(H)$, dove $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$ dipende esclusivamente da γ.

4. – Supponiamo ora che X sia riflessivo, che K contenga un punto x_0 con orbita limitata e che inoltre per ogni $x \in \overline{C(x_0)}$ risulti

$$f(\overline{C(x)}) \subseteq \overline{C(x)} \quad (4.1)$$ (8).

Allora, per il Lemma di Zorn, esiste in $\overline{C(x_0)}$ un insieme H minimale non vuoto, chiuso, convesso, mutato in sè da f. Per ogni x di H risulta allora $\overline{C(x)} = H$ e quindi, per il Lemma III

$$r(x) = \delta(H) \qquad \forall x \in H. \quad (4.2)$$

La (4.2) implica $r(x) = \delta(H) = 0$, e quindi l'esistenza di un punto unito per f in K:

a) se f è a diametri orbitali decrescenti;

b) se $C(x_0)$ ha struttura normale;

c) se $\overline{C(x_0)}$ ha struttura quasi–normale e $\operatorname*{Inf}_{x,y \in C(x_0)} a(x, y) > 0$ (9).

Ad analoghi risultati si perviene in uno spazio X vettoriale normato qualsiasi, se K è debolmente compatto e per ogni suo punto vale la (4.1). Se, in particolare, X è uno spazio di Banach e f è continua, per ogni punto di K vale (4.1) e inoltre $\overline{C(x)}$ è separabile ed ha quindi struttura quasi–normale. Ne segue il

TEOREMA II. – *Se* X *è uno spazio di Banach*, K *è debolmente compatto, f è continua e* $\operatorname*{Sup}_{x,y \in K} b(x, y) < 1$, *esiste in* K *uno e un solo punto unito per f* (10).

COROLLARIO. – *Nelle precedenti ipotesi per f, se* X *è riflessivo e* K *contiene un punto con orbita limitata, esiste in* K *uno e un solo punto unito per f.*

Infatti, se $x_0 \in K$ ha orbita limitata, basta applicare il Teorema II a $\overline{C(x_0)}$.

Sia $F : K \to K$ un'applicazione tale che:

$$\delta(C_n(x)) \leq r(x) \qquad \forall n \geq 0 \wedge \forall x \in K, \quad (4.3)$$

$$r(x) = \operatorname*{Sup}_{n=0,1\cdots} \| x - f^n(x) \| \qquad \forall x \in K. \quad (4.4)$$

(8) La (4.1) è soddisfatta, ad esempio, dalle applicazioni f che verificano la condizione

$$x_n \to x \wedge f(x_n) \rightharpoonup y \Rightarrow y = f(x).$$

Se X è un generico spazio normato (e $\overline{C(x)} \neq \varnothing$) la (4.1) è verificata, ad esempio, se f è continua o demicontinua.

(9) In questo caso infatti, se fosse $\delta(H) < 0$, esisterebbe $x \in H$, tale che $\| x - y \| < \delta(H)\ \forall y \in H$. Ma allora si avrebbe, per ogni $n > 0$

$$\| f(x) - f^{n+1}(x) \| \leq 2\, a(x, f^n(x)) \| x - f(x) \| + b(x, f^n(x)) \| x - f^n(x) \| < \delta(H)$$

e quindi, per il Lemma I, $r(f(x)) < \delta(H)$, il che è assurdo per la (4.2).

Per il concetto di struttura quasi–normale vedasi [6]; vedasi anche [7].

(10) Questo Teorema contiene il Teorema III di [6].

Per una tale applicazione valgono evidentemente i Lemmi I e III. Pertanto i risultati di questo paragrafo (ad eccezione di quelli riguardanti la struttura quasi–normale) sono validi per tutte le applicazioni F soddisfacenti (4.3) e (4.4).

5. – Se X è uno spazio normato strettamente convesso, l'insieme dei punti uniti di un'applicazione non espansiva è chiuso e convesso. Se f, più generalmente, soddisfa la condizione (A), l'insieme dei suoi punti uniti ha struttura analoga. Vale infatti il

TEOREMA III. – *Se* X *è strettamente convesso, l'insieme dei punti uniti di f in* K *è chiuso e convesso.*

Infatti, supponiamo che l'insieme U dei punti uniti di f in K sia non vuoto, e sia $\{x_n\}$ una successione di punti di U convergente a x. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, $n > n_0(\varepsilon)$, risulta

$$\|x - f(x)\| = \|x - x_n + x_n - f(x)\| \leq a(x, x_n) \|x - f(x)\| + 2\varepsilon$$

cioè $(1 - a(x, x_n)) \|x - f(x)\| \leq 2\varepsilon$. Quindi $x = f(x)$ e U è chiuso.

Per dimostrare che U è convesso basta allora dimostrare che, se x_1 e x_2 appartengono a U, allora $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ appartiene a U.

Si ha (con ovvio significato dei simboli)

$$\|x - f(x)\| \leq \frac{1}{2} \|f(x_1) - f(x)\| + \frac{1}{2} \|f(x_2) - f(x)\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \{a_i \|x - f(x)\| + b_i \|x_i - x\|\}$$

da cui

$$\|x - f(x)\| \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_1 + b_2}{2 - a_1 - a_2} \|x_1 - x_2\| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| .$$

Ma allora, per $i = 1, 2$

$$\|f(x) - x_i\| \leq \frac{1}{2} \{a_i \|x_1 - x_2\| + b_i \|x_1 - x_2\|\} \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \tag{5.1}$$

e quindi $\|f(x) - x_1\| + \|f(x) - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Ne segue, poichè X è strettamente convesso, che $f(x)$ appartiene al segmento che unisce x_1 a x_2 [11] e, per (5.1), che $f(x)$ è il punto medio di tale segmento; perciò $x = f(x)$.

OSSERVAZIONE. – A partire dal Teorema III, con un procedimento dimostrativo analogo a quello utilizzato da F. Browder in [1], è possibile estendere il Teorema 2 di [1] alle famiglie commutative di applicazioni soddisfacenti la condizione (A).

(11) Si veda, ad esempio, [2], Teorema 3.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. BROWDER, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *54*, 1041–1044 (1965).

[2] J. R. CALDER, *A property of l_p spaces*, « Proc. Am. Math. Soc. », *17*, 202–206 (1966).

[3] D. GÖHDE, *Zum prinzip der kontraktiven Abbildung*, « Math. Nach. », *30*, 251–258 (1965).

[4] W. A. KIRK, *A fixed point Theorem for mappings which do not increase distances*, « Amer. Math. Monthly », *72*, 1004–1006 (1965).

[5] P. SOARDI, *Su un problema di punto unito di S. Reich*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (4) *4*, 841–845 (1971).

[6] P. SOARDI, *Struttura quasi normale e teoremi di punto unito*, « Riv. Ist. Mat. Trieste » (in corso di stampa).

[7] R. M. TIBERIO BIANCHINI, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (4) *5*, 103–108 (1972).