Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Paganoni

Il metodo del punto fisso per la classe di equazioni funzionali $f[F(x,y)] = H[f(x), f(y); x, y]$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 675–681.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_675_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi funzionale. — *Il metodo del punto fisso per la classe di equazioni funzionali* $f[\mathrm{F}(x,y)] = \mathrm{H}[f(x), f(y); x, y]$ (*). Nota di
LUIGI PAGANONI, presentata (**) dal Corrisp. G. RICCI.

SUMMARY. — A classic fixed-point Theorem enables us to give conditions for the existence and the uniqueness of continuous solutions of the functional equation $f[\mathrm{F}(x,y)] = \mathrm{H}[f(x), f(y); x, y]$.

1. INTRODUZIONE

Oggetto della presente Nota è lo studio di alcuni problemi inerenti l'equazione funzionale

$$(*) \qquad f[\mathrm{F}(x,y)] = \mathrm{H}[f(x), f(y); x, y]$$

in cui

$$\mathrm{F}: \mathrm{E}\times\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{E} \quad , \quad \mathrm{H}: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\times\mathrm{E}\times\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{N} \quad , \quad f: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{N}.$$

In un precedente articolo [1] J. Aczèl ha studiato tale equazione nel caso di variabili reali e ha dimostrato che, sotto opportune ipotesi per le funzioni F e H, esiste al più una soluzione di (*) soddisfacente condizioni che impegnano i valori della f in un prefissato insieme di punti (tali condizioni le diremo brevemente « condizioni iniziali »).

Lo studio di (*) è stato successivamente affrontato da altri Autori ([2], [4]–[5], [7]–[11]) anche nel caso di spazi vettoriali topologici e di spazi metrici ed ha portato a Teoremi di unicità che, a parte le naturali differenze sulle ipotesi per F e H, conducono tutti alla conclusione, analoga a quella di J. Aczèl, che esiste al più una soluzione di (*) soddisfacente preassegnate « condizioni iniziali ».

In generale può capitare che, variando le « condizioni iniziali », si possano trovare più soluzioni dell'equazione funzionale (*).

In questa Nota viene mostrato che, se H soddisfa una opportuna condizione, l'equazione funzionale (*) possiede al più una soluzione: e precisamente o non esiste alcuna soluzione oppure ne esiste una sola per la quale ovviamente le « condizioni iniziali » non possono essere scelte ad arbitrio.

Si noti che, mentre nei precedenti lavori l'attenzione viene fissata sulla funzione F e su di essa vengono fatte le ipotesi più onerose, in questa Nota le ipotesi più gravose vengono fatte sulla funzione H in modo da potersi ricondurre a condizioni nelle quali si possa applicare un noto Teorema sul punto fisso.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R..

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

2. Considerazioni preliminari

Si consideri l'equazione funzionale (*) e si supponga che:

i) E sia uno spazio topologico;

ii) $N = (N, d)$ sia uno spazio metrico completo e limitato, con metrica d [1];

iii) F sia una *mappa di identificazione* (si veda ad esempio [3] o [6]), cioè una funzione continua, suriettiva e tale che da $F^{-1}(U)$ aperto segua U aperto;

iv) H sia una funzione continua.

Si indichi con $C(E, N)$ l'insieme delle funzioni continue da E in N. È ben noto (ad esempio [3] o [6]) che $C(E, N)$ è uno spazio metrico completo di fronte alla classica metrica

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x)).$$

Nel seguito supporremo sempre $C(E, N)$ munito della topologia indotta da tale metrica.

Il problema che qui si vuole esaminare è quello della ricerca di condizioni per l'esistenza e l'unicità di soluzioni dell'equazione funzionale (*) in $C(E, N)$.

Sia, $\forall a \in E$, Γ_a l'insieme di livello di F, cioè

$$\Gamma_a = \{(x, y) \in E \times E : F(x, y) = a\}.$$

Si consideri la classe $\mathcal{H} \subset C(E, N)$ costituita da quelle funzioni continue $f: E \to N$ per le quali $H[f(x), f(y); x, y]$ assume valore costante su ogni insieme Γ_a di livello di F, cioè:

$$\mathcal{H} = \{f \in C(E, N) : \forall a \in E, ((x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma_a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H[f(x_1), f(y_1); x_1, y_1] = H[f(x_2), f(y_2); x_2, y_2]\}.$$

Vale allora il seguente

Lemma 1. – *Per ogni $f \in \mathcal{H}$ esiste una ed una sola funzione $g: E \to N$ tale che $H[f(x), f(y); x, y] = g[F(x, y)]$. Inoltre $g \in C(E, N)$.*

Dimostrazione. – L'esistenza e l'unicità di g seguono dalla definizione stessa di $\mathcal{H}$ e dalla suriettività di F. La funzione g è inoltre continua poichè F è una mappa di identificazione (vedi ad esempio [3], p. 123).

(1) Si osservi che se $N = (N, d)$ è uno spazio metrico completo ma non limitato, si può pensare di sostituire a d una metrica equivalente d^* in modo che $N = (N, d^*)$ risulti completo e limitato (ad esempio si ponga $d^*(r, s) = d(r, s)/(1 + d(r, s))$).

Ad ogni $f \in \mathcal{H}$ si viene così ad associare una funzione $g \in C(E, N)$; questa applicazione verrà indicata con T, cioè poniamo:

$$T : \mathcal{H} \to C(E, N) \quad , \quad Tf = g.$$

Si consideri ora la successione $\mathcal{H}_n$ così definita:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \quad , \quad \mathcal{H}_n = T^{-1}(\mathcal{H}_{n-1}) \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Poniamo $\mathcal{H}^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Si constata immediatamente che $\mathcal{H}^*$ è costituito da tutte e sole quelle funzioni f per le quali $T^n f \in \mathcal{H}$, $n = 0, 1, \cdots$.

Valgono inoltre i seguenti due Lemmi di ovvia dimostrazione

LEMMA 2. – $\mathcal{H}^*$ *gode delle seguenti proprietà*:

$$T : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^* \quad , \quad T^{-1}(\mathcal{H}^*) = \mathcal{H}^*.$$

LEMMA 3. – *Condizione necessaria perché l'equazione funzionale* (*) *possegga soluzioni continue è che* $\mathcal{H}^*$ *non sia vuoto.*

LEMMA 4. – *Se* $f_n \in \mathcal{H}^*$ $(n = 0, 1, \cdots)$, $f \in C(E, N)$ *e* $f_n(x) \to f(x)$ *per ogni* $x \in E$, *allora* $f \in \mathcal{H}^*$.

Dimostrazione. – Anzitutto $f \in \mathcal{H}$: infatti, essendo N di Hausdorff e H continua, $\forall (x, y) \in E \times E$, $\lim_{n \to +\infty} H[f_n(x), f_n(y); x, y] = H[f(x), f(y); x, y]$; inoltre, poichè $H[f_n(x), f_n(y); x, y]$ assume valore costante su ogni Γ_c, lo stesso accade per $H[f(x), f(y); x, y]$ ed allora, per il Lemma 1, esiste $g \in C(E, N)$ tale che $g[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$. Ne segue allora che, posto $g_n = Tf_n$ e $g = Tf$, risulta $g_n \in \mathcal{H}$, $g \in C(E, N)$ e $g_n(x) \to g(x)$, $\forall x \in E$. Ma allora, per quanto è sopra dimostrato, $g = Tf \in \mathcal{H}$.

Procedendo iterativamente si dimostra che, $\forall n \geq 0$, $T^n f \in \mathcal{H}$ e quindi $f \in \mathcal{H}^*$.

Si ricava ora il seguente

COROLLARIO. – $\mathcal{H}^*$, *come sottospazio di* $C(E, N)$, *è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. – Poichè $C(E, N)$ è completo, basta mostrare che $\mathcal{H}^*$ è chiuso. Sia $f_n \in \mathcal{H}^*$, $f \in C(E, N)$ e $f_n \to f$ (nella topologia di $C(E, N)$). Allora, $\forall x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$ e dal Lemma 4 segue che $f \in \mathcal{H}^*$.

3. TEOREMI DI ESISTENZA E UNICITÀ

Si è visto nel precedente paragrafo che $\mathcal{H}^*$ è uno spazio metrico completo e che $T : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$; ci proponiamo quindi di applicare il classico Teorema di Banach sulle contrazioni con l'introduzione di una ipotesi opportuna.

TEOREMA 1. – *Sia data l'equazione funzionale* (*). *Siano soddisfatte le ipotesi* i)–iv) *che compaiono all'inizio di* 2; *valga inoltre la condizione*:

v) $\exists k\,,\ 0 < k < 1$, *tale che*, $\forall x\,,y \in \mathrm{E}$ *e* $\forall u\,,v\,,u_1\,,v_1 \in \mathrm{N}$,

$$d(\mathrm{H}[u\,,v\,;x\,,y]\,,\mathrm{H}[u_1\,,v_1\,;x\,,y]) \leq k \operatorname{Max}\{d(u\,,u_1)\,,d(v\,,v_1)\}.$$

In queste ipotesi, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione funzionale (*) *possegga soluzioni continue è che* $\mathcal{H}^*$ *non sia vuoto*; *in tal caso la soluzione è unica.*

Dimostrazione. – La condizione necessaria è garantita dal Lemma 3. Dimostriamo che la condizione è sufficiente. $\forall f\,,g \in \mathcal{H}^*$ si ha:

$$\begin{aligned}\delta(\mathrm{T}f\,,\mathrm{T}g) &= \sup_{x\in \mathrm{E}} d(\mathrm{T}f(x)\,,\mathrm{T}g(x)) = \sup_{(x,y)\in \mathrm{E}\times\mathrm{E}} d(\mathrm{T}f(\mathrm{F}(x\,,y))\,,\mathrm{T}g(\mathrm{F}(x\,,y))) = \\ &= \sup_{(x,y)\in \mathrm{E}\times\mathrm{E}} d(\mathrm{H}[f(x)\,,f(y)\,;x\,,y]\,,\mathrm{H}[g(x)\,,g(y)\,;x\,,y]) \\ &\leq k \sup_{(x,y)\in \mathrm{E}\times\mathrm{E}} \operatorname{Max}\{d(f(x)\,,g(x))\,,d(f(y)\,,g(y))\} = \\ &= k \sup_{x\in \mathrm{E}} d(f(x)\,,g(x)) = k\,\delta(f\,,g).\end{aligned}$$

Perciò T è una contrazione di uno spazio metrico completo in sè; per il noto Teorema di Banach esiste allora uno ed un sol punto f^* tale che $\mathrm{T}f^* = f^*$. Tale elemento è ovviamente soluzione dell'equazione funzionale (*).

Nelle ipotesi i)–v) esiste perciò al più una soluzione continua dell'equazione funzionale (*). L'esistenza di tale soluzione si può garantire mostrando che $\mathcal{H}^*$ non è vuoto: il Teorema seguente risponde a detta richiesta.

TEOREMA 2. – *Si consideri l'equazione funzionale* (*) *e si supponga che*:

a) *siano soddisfatte le ipotesi* i)–v) *del Teorema 1*;

b) *la funzione* $\mathrm{H}[u\,,v\,;x\,,y]$ *non dipenda da* x *e da* y.

Allora $\mathcal{H}^* \neq \varnothing$ *e perciò l'equazione funzionale* (*) *possiede una ed una sola soluzione continua.*

Dimostrazione. – $\mathrm{H}[u\,,v\,;x\,,y] = \mathrm{K}(u\,,v)$. Perciò, qualunque sia F, le funzioni costanti, $f = c$, appartengono ad $\mathcal{H}$ poichè per esse $\mathrm{H}[c\,,c\,;x\,,y] = \mathrm{K}(c\,,c)$ è costante; in tal caso perciò anche $\mathrm{T}f$ è costante. Per induzione si ricava allora che, $\forall n \geq 0$, $\mathrm{T}^n f$ è costante e quindi $\mathrm{T}^n f \in \mathcal{H}$; ne segue che $f \in \mathcal{H}^*$.

Osservazione. – Si consideri ad esempio l'equazione funzionale

$$f[\mathrm{F}(x\,,y)] = \frac{f(x) + f(y)}{\lambda}$$

con N spazio normato compatto. Si verifica immediatamente che, per $|\lambda| > 2$, essa soddisfa le ipotesi del Teorema 2 e possiede quindi la sola soluzione continua $f = 0$. Se $\lambda = 2$ essa possiede invece infinite soluzioni, ad esempio le funzioni costanti: questo fatto non è in contrasto col Teorema 2 poichè in tal caso non esiste alcun numero $k < 1$ per il quale sia soddisfatta l'ipotesi V).

Il Teorema che segue fornisce opportune condizioni su F e H affinchè risulti $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$; in questo caso l'esistenza di una soluzione per l'equazione funzionale (*) è equivalente all'esistenza di una funzione f per la quale $H[f(x), f(y); x, y]$ è costante su ogni Γ_a, $a \in E$.

TEOREMA 3. – *Si consideri l'equazione funzionale* (*) *e si supponga che*:

a) *siano soddisfatte le ipotesi* i)–iv) *del Teorema 1*;

b) $\exists \varphi : E \to E$ *e* $\exists \psi : E \to E$ *tali che*:
$\forall r, s \in E \quad , \quad F(\varphi(r), \varphi(r)) = r \quad , \quad F(\varphi(r), \varphi(s)) = \psi(F(r, s))$;

c) $\exists K : N \times E \to N$ *tale che*:
$$H\{H[u, u; \varphi(x), \varphi(x)], H[v, v; \varphi(y), \varphi(y)]; x, y\} =$$
$$= K\{H[u, v; \varphi(x), \varphi(y)], F(x, y)\}.$$

Allora è $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$.

Dimostrazione. – Basta mostrare che, se $f \in \mathcal{H}$, anche $g = Tf \in \mathcal{H}$. Sia $f \in \mathcal{H}$; allora $H[f(x), f(y); x, y] = g[F(x, y)]$. Dalla *b*) segue allora $g(r) = H[f(\varphi(r)), f(\varphi(r)); \varphi(r), \varphi(r)]$ e dalla *c*), $H[g(r), g(s); r, s] =$
$= H\{H[f(\varphi(r)), f(\varphi(r)); \varphi(r), \varphi(r)], H[f(\varphi(s)), f(\varphi(s)); \varphi(s), \varphi(s)]; r, s\} =$
$= K\{H[f(\varphi(r)), f(\varphi(s)); \varphi(r), \varphi(s)], F(r, s)\} = K\{g[F(\varphi(r), \varphi(s))], F(r, s)\} =$
$= K\{g[\psi(F(r, s))], F(r, s)\} = \theta(F(r, s))$. Cioè $g = Tf \in \mathcal{H}$.

Esempio. – Si consideri la seguente equazione funzionale

$$f(x + y) = \frac{(x + a) f(x) + (y + a) f(y) + \alpha}{\lambda(x + y + a)}$$

in cui: $E \equiv (0, +\infty)$, $N \equiv [-A, A]$, $a \geq 0$, α reale , $\lambda \neq 0$. Qui $F(x, y) = x + y$ e $H[u, v; x, y] = \dfrac{(x + a) u + (y + a) v + \alpha}{\lambda(x + y + a)}$.

Si riconosce facilmente che, se $|\lambda| \geq 2$ e $aA(|\lambda| - 2) \geq \alpha$, sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 3 con $\varphi(r) = \psi(r) = r/2$ e $K(s, t) = \dfrac{s(t + 2a) + \alpha}{(t + a)}$; perciò $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$. Inoltre $\mathcal{H}$ non è vuoto poichè ad esso appartengono tutte le funzioni costanti.

Se poi $|\lambda| > 2$, è soddisfatta anche l'ipotesi v) del Teorema 1 e quindi tale equazione possiede una ed una sola soluzione continua.

Osservazione 1. – Si noti che, se la funzione H dipende da x e y tramite la funzione $F(x, y)$, la classe $\mathcal{H}$ contiene almeno tutte le funzioni costanti. In questo caso, se è soddisfatto il complesso delle ipotesi del Teorema 1 e del Teorema 3, l'equazione funzionale (*) possiede una ed una sola soluzione continua.

Osservazione 2. – La proprietà che $\mathcal{H}$ non sia vuoto è equivalente alla esistenza di almeno una coppia di funzioni continue f e g, soluzioni dell'equazione funzionale

$$g[F(x,y)] = H[f(x), f(y); x, y].$$

Si supponga ora che qualche ipotesi del Teorema 1 non sia soddisfatta.

Se esiste $E_0 \subset E$ tale che l'equazione funzionale (*) ristretta a E_0 (cioè considerando $x, y \in E_0$) soddisfi tutte le ipotesi del Teorema 1, allora tutte le eventuali soluzioni di (*) coincidono su E_0.

Allo scopo di individuare un insieme contenente E_0 limitatamente al quale sia garantita l'unicità delle soluzioni dell'equazione funzionale (*), si consideri la successione di insiemi E_n definita per induzione nel modo seguente.

Si ponga:

$$G_0 = L_0 = M_0 = E_0,$$

$$G_n = \{x \in E : \exists y \in E_{n-1} \quad \text{tale che} \quad F(x,y) \in E_{n-1}\} \qquad \text{per } n \geq 1,$$

$$L_n = \{y \in E : \exists x \in E_{n-1} \quad \text{tale che} \quad F(x,y) \in E_{n-1}\} \qquad \text{per } n \geq 1,$$

$$M_n = G_n \cup L_n,$$

$$E_n = M_n \cup F(M_n \times M_n).$$

Definizione. – L'insieme $R(E_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ si dirà « insieme F–raggiungibile da E_0 ».

Sussiste allora il seguente

LEMMA 5. – *Si consideri l'equazione funzionale* (*) *e si supponga che* $H[u, v; x, y]$ *sia iniettiva rispetto a ciascuna delle prime due variabili separatamente, cioè*:

$$\forall x, y \in E, \forall v \in N, \quad H[u_1, v; x, y] = H[u_2, v; x, y] \Rightarrow u_1 = u_2,$$

$$\forall x, y \in E, \forall u \in N, \quad H[u, v_1; x, y] = H[u, v_2; x, y] \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Allora, se due soluzioni dell'equazione funzionale (*) *coincidono su* $E_0 \subset E$, *esse coincidono su* $R(E_0)$.

Dimostrazione. – Si procede per induzione. Siano f_1 e f_2 due soluzioni di (*); supposto che esse coincidano su E_{n-1} si dimostra che esse coincidono su E_n. Infatti per l'iniettività di H rispetto alla sua prima variabile, $\forall x \in G_n$ e $\forall y \in E_{n-1}$ si ha: $H[f_1(x), f_1(y); x, y] = f_1[F(x,y)] = f_2[F(x,y)] = H[f_2(x), f_2(y); x, y]$ e poichè $f_1(y) = f_2(y)$ ne segue $f_1(x) = f_2(x)$. Perciò f_1 e f_2 coincidono su G_n. Analogamente, per l'iniettività di H rispetto alla seconda variabile, f_1 e f_2 coincidono su L_n e quindi anche su M_n; infine dall'equazione funzionale (*) si ricava che esse coincidono su $F(M_n \times M_n)$ e quindi su E_n. Perciò, $\forall x \in R(E_0)$, $f_1(x) = f_2(x)$.

Si può a questo punto enunciare il seguente

TEOREMA 4. – *Si consideri l'equazione funzionale* (*) *e si supponga che*:

a) $\exists E_0 \subset E$, $E_0 \neq \varnothing$, *tale che l'equazione funzionale* (*) *ristretta ad* E_0 *soddisfi le ipotesi del Teorema* 1;

b) $H[u, v; x, y]$ *sia iniettiva rispetto a ciascuna delle sue prime due variabili separatamente.*

Allora tutte le soluzioni continue di (*) *coincidono su* $\overline{R(E_0)}$. *In particolare, se* $R(E_0)$ *è denso in* E, *esiste al più una soluzione continua di* (*).

Dimostrazione. – Poichè, per il Teorema 1, tutte le soluzioni continue di (*) coincidono su E_0, esse, per il Lemma 5, coincidono su $R(E_0)$; inoltre, essendo continue ed essendo N di Hausdorff, esse coincidono su $\overline{R(E_0)}$. Il resto della dimostrazione è evidente.

Osservazione 1. – Nel caso in cui H sia iniettiva rispetto alla prima [seconda] variabile soltanto, gli enunciati del Lemma 5 e del Teorema 4 sono ancora validi pur di sostituire a $R(E_0)$ l'insieme $S(E_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} E'_n$, dove $E'_0 = E_0$ e $E_n = G_n \cup F(G_n \times G_n)$ $[E'_n = L_n \cup F(L_n \times L_n)]$.

Osservazione 2. – Se, in base a qualcuno dei Teoremi stabiliti nei precedenti lavori ([1]–[2], [4]–[5], [7]–[11]), si può affermare che l'equazione funzionale (*) possiede al più una soluzione continua soddisfacente « condizioni iniziali » assegnate su un insieme Q, ed inoltre esiste E_0 tale che l'equazione funzionale (*) ristretta a E_0 soddisfi le ipotesi del Teorema 1, allora, se $E_0 \supset Q$, l'equazione funzionale (*) possiede al più una sola soluzione continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ACZÉL, *Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und einige ihrer Anwendungen*, « Acta Math. Acad. Sci. Hung. », *15*, 355–361 (1964).

[2] J. ACZÉL e M. HOSSZÚ, *Further Uniqueness Theorems for Functional Equations*, « Acta Math. Acad. Sci. Hung. », *16*, 51–55 (1965).

[3] J. DUGUNDJI, *Topology*, Ed. Allyn and Bacon, Boston, 1966 repr. 1970.

[4] T. D. HOWROYD, *Some Uniqueness Theorems for Functional Equations*, « J. Austral. Math. Soc. », *9*, 176–179 (1969).

[5] T. D. HOWROYD, *The Uniqueness of Bounded or Measurable Solutions of Some Functional Equations*, « J. Austral. Math. Soc. », *11*, 186–190 (1970).

[6] J. L. KELLEY, *General Topology*, D. Von Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

[7] J. B. MILLER, *Aczél's Uniqueness Theorem and Cellular Internity*, « Aequationes Math. », *5*, 319–325 (1970).

[8] C. T. NG, *Uniqueness Theorems for a General Class of Functional Equations*, « J. Austr. Math. Soc. », *11*, 362–366 (1970).

[9] L. PAGANONI, *Esistenza di soluzioni per una classe generale di equazioni funzionali*, « Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. », *A105*, 891–906 (1971).

[10] S. PAGANONI MARZEGALLI, *Teoremi di unicità per l'equazione funzionale* $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ *negli spazi metrici*, « Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », *50*, 210–215 (1971).

[11] S. PAGANONI MARZEGALLI, *Estensione di alcuni teoremi di unicità per una classe generale di equazioni funzionali in spazi vettoriali topologici*, « Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. », *A105*, 713–720 (1971).