Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Ambrosetti

Esistenza di infinite soluzioni per problemi non lineari in assenza di parametro

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 660–667.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_660_0>

Equazioni differenziali. — *Esistenza di infinite soluzioni per problemi non lineari in assenza di parametro.* Nota di ANTONIO AMBROSETTI [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Consider the variational, non-linear boundary value problem

$$(1) \qquad \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,k}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \psi(x, u(x)) = 0 \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

in a bounded open set $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. If $a_{i,k}(x)$ and $\psi(x,t)$ satisfy suitable conditions (see § 1), we prove that (1) has an infinite number of solutions, which are the critical points of a functional on a suitable manifold. This critical points are studied by means of Lusternik–Schnirelman theory.

1. Sia Ω un insieme aperto limitato di $\mathbf{R}^n$. Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,k}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \psi(x, u(x)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ove $a_{i,k}(x)$ e $\psi(x,t)$ verificano le seguenti ipotesi:

a) $a_{i,k}(x) = a_{k,i}(x)$ sono funzioni misurabili limitate tali che $\exists \Lambda_1, \Lambda_2$ positivi per cui:

$$\Lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,k} a_{i,k}(x)\, \xi_i\, \xi_k \leq \Lambda_2 |\xi|^2$$

b) per ogni t, si ha che $\psi(x,t)$ è misurabile rispetto ad x; per quasi ogni x $\psi(x,t)$ è di classe $\mathcal{C}^2$ rispetto a t;

c) per quasi tutti gli $x \in \Omega$, si ha che $\psi(x, -t) = -\psi(x,t)$;

d) per quasi tutti gli $x \in \Omega$, la funzione $\alpha(x,t) = t^{-1}\psi(x,t)$ è convessa in t e tale che:

$$\alpha_t(x,t) > 0 \ ^{(1)} \text{ per } t > 0, \ \lim_{t\to 0} \alpha(x,t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \alpha(x,t) = +\infty;$$

e) $|\psi(x,t)| \leq m_1(x) + K_1|t|^r$, $|\psi_t(x,t)| \leq m_2(x) + K_2|t|^{r-1}$, $|t\psi_{tt}(x,t)| \leq$ $\leq m_3(x) + K_3|t|^{r-1}$ con $m_1(x) \in L^{\frac{2n}{2+n}}(\Omega)$, $m_2(x)$ ed $m_3(x) \in L^{n/2}(\Omega)$ e $r < \dfrac{n+2}{n-2}$ per $n > 2$ ed r qualunque per $r \leq 2$.

(*) Indirizzo dell'autore: Istituto Matematico «L. Tonelli» – via Derna, 1 – Pisa (56100).
Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.
(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

(1) Con $\alpha_t(x,t)$ si indica la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial t}\alpha(x,t)$. Analogamente per $\psi_t(x,t)$ e $\psi_{tt}(x,t)$.

Le soluzioni di (1) saranno intese in senso generalizzato: saranno cioè le funzioni $u \in \mathring{W}^1(\Omega)$ (2), tali che

$$\int_\Omega \sum_{i,k} a_{i,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx - \int_\Omega \psi(x, u(x)) \, v(x) \, dx = 0 \qquad \forall v \in \mathring{W}^1(\Omega). \tag{2}$$

La (2) è equivalente all'equazione funzionale

$$u - B(u) = 0 \qquad u \in \mathring{W}^1(\Omega) \tag{3}$$

con B operatore compatto, variazionale, pari e con accrescimento superlineare. A differenza del problema del tipo

$$v - \lambda B(v) = 0 \tag{4}$$

che è stato trattato da numerosi Autori (cfr. [1], [3], [4]) mediante la teoria di Lusternik-Schnirelman, non mi risulta che la (3) sia stata studiata, tranne nel caso in cui B sia omogeneo di grado maggiore di uno, caso in cui la (3) si riduce banalmente alla (4). D'altra parte, la presenza del parametro λ non è sempre naturale in questo tipo di problema, e si può congetturare che basti l'accrescimento superlineare di B a garantire la presenza di infinite soluzioni della (3): ciò che appunto viene dimostrato in questa Nota.

Un problema per certi versi simile a (3) è stato affrontato da J. A. Hempel in un recente lavoro [2]: egli studia l'equazione

$$u - C(u) + B(u) = 0 \tag{5}$$

ove C è un operatore lineare compatto positivo, dimostrando che (5) ha tante soluzioni quanti sono gli autovalori di $u - \lambda C(u)$ minori di 1. Il metodo usato da Hempel consiste in questo: le eventuali soluzioni di (5) si trovano certamente sulla varietà ottenuta moltiplicando scalarmente in $\mathring{W}^1(\Omega)$ ambedue i membri della (5) per u. Egli dimostra che questa è una buona varietà in $\mathring{W}^1(\Omega)$ e che le soluzioni di (5) sono i punti critici di un opportuno funzionale su tale varietà.

Riprendendo tale metodo, dimostro che, se sono verificate le ipotesi (*a*) - (*e*), allora la (2) ha infinite soluzioni. Si osservi che nel caso della (3), l'assenza del termine lineare C (u) e la presenza di $-$ B (u) al posto di B (u) fa sì che - a differenza di quanto accade nel lavoro di Hempel - la varietà che occorre considerare ha categoria infinita, ha distanza positiva dall'origine ed è in generale non limitata.

Desidero ringraziare Giovanni Prodi per le utili discussioni avute con lui.

(2) $\mathring{W}^1(\Omega) = \mathring{W}^1_2(\Omega)$ indica, come al solito, la chiusura rispetto alla norma

$$\int_\Omega u^2(x) \, dx + \int_\Omega \Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

della classe $\mathfrak{D}(\Omega)$ delle funzioni infinitamente derivabili in Ω e a supporto compatto in Ω.

2. Poichè lo studio della (2) verrà fatto mediante la teoria dei punti critici di Lusternik–Schnirelman, richiamiamo in questo paragrafo alcuni enunciati relativi a tale teoria. Per maggiori dettagli si rimanda a [3] e [4].

DEFINIZIONE 2.1. *Sia* M *uno spazio topologico e* T *un sottoinsieme di* M. *Si definisce* cat (T ; M) *come il minimo* n *intero tale che* $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ *con* T_i *chiusi e contrattili ad un punto in* M. *Se di tali interi non ne esistono, si pone* $\operatorname{cat}(T ; M) = +\infty$.

Vale la pena ricordare che, se consideriamo la sfera unitaria S in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, ed identifichiamo i punti antipodali di S, si ottiene una varietà P (S) (spazio proiettivo di dimensione infinita) tale che $\operatorname{cat}(P(S) ; P(S)) = +\infty$.

Il teorema fondamentale della teoria di L — S è il seguente: esso fissa una limitazione inferiore al numero dei punti critici che un funzionale ha su una varietà.

TEOREMA 2.2. ([3], [4]). *Sia* M *una varietà* $\mathcal{C}^2$ *Riemanniana, completa, modellata su uno spazio di Hilbert e sia* f *un funzionale di classe* $\mathcal{C}^2$ *definito su* M, *inferiormente limitato e verificante la seguente ipotesi (introdotta da R. Palais e S. Smale)*:

(P–S) *ogni successione* $(u_n) \subset M$ *tale che* $f(u_n)$ *è limitata e* $\operatorname{grad} f(u_n) \to 0$, *ammette una sottosuccessione convergente.*

Allora f *ha almeno* cat (M ; M) *punti critici.*

Sia H uno spazio di Hilbert. Indichiamo con $(\cdot , \cdot)$ il prodotto scalare in H e sia $g(u)$ un funzionale definito in H.

DEFINIZIONE 2.3. *Diremo che* $M = \{u : u \in H , g(u) = 0\}$ *è una varietà regolare di codimensione* 1 *in* H *se* g *è di classe* $\mathcal{C}^2$ *e se il* $\operatorname{grad} g(u)$ *è non nullo su* M.

Nel caso particolare che M è una varietà regolare di codimensione 1 in H, può essere utile il seguente criterio per verificare l'ipotesi (P–S):

LEMMA 2.4. *Sia* $M = \{u : u \in H , g(u) = 0\}$ *una varietà regolare di codimensione* 1 *in* H. *Supponiamo che* $\operatorname{grad} g(u) = u - K(u)$ *con* K *operatore compatto.* $\forall s$ *l'insieme* $M^s = \{u : u \in M , f(u) \leq s\}$ *sia limitato. Inoltre supponiamo che* $\operatorname{grad} f(u)$ *sia compatto e che per ogni numero reale* s *esista un* $h > 0$, *tale che risulti in* $M^s : \| \operatorname{grad} f(u) \| \geq h > 0$. *Allora* $f/_M$ *verifica l'ipotesi* (P–S).

Dimostrazione. Il gradiente di $f/_M$ ha la seguente espressione:

$$\operatorname{grad} f/_M (u) = \operatorname{grad} f(u) - \frac{(\operatorname{grad} f(u) , \operatorname{grad} g(u))}{\| \operatorname{grad} g(u) \|_H^2} \operatorname{grad} g(u).$$

Si osservi che il secondo membro ha senso, perchè M è una varietà regolare di codimensione 1 in H. Poniamo $a(u) = \| \operatorname{grad} g(u) \|_H^{-2} (\operatorname{grad} f(u), \operatorname{grad} g(u))$.

Consideriamo una generica successione u_n tale che $u_n \in M^s$, per un certo s fissato e che

$$\text{grad} f(u_n) - a(u_n) \,\text{grad}\, g(u_n) = p_n, \qquad \text{con } p_n \to 0. \tag{6}$$

Per dimostrare il Lemma occorre far vedere che tale u_n contiene una sottosuccessione convergente. Ora, poichè $u_n \in M^s$, segue che (u_n) è un insieme limitato; quindi anche $\text{grad}\, g(u_n) = u_n - K(u_n)$ è limitato. Inoltre, per ipotesi, per $u \in M^s$, $\text{grad} f(u)$ si mantiene discosto da zero e perciò dalla (6) si ottiene che esiste un $\tilde{h} > 0$ tale che $|a(u_n)| \geq \tilde{h} > 0$. Allora si può scrivere:

$$\text{grad}\, g(u_n) = u_n - K(u_n) = \frac{1}{a(u_n)} (\text{grad} f(u_n) - p_n) = w_n. \tag{7}$$

Grad$f(u)$ è compatto e (u_n) è limitato, quindi l'insieme (w_n) è relativamente compatto. Inoltre dal fatto che u_n è limitato segue anche che $K(u_n)$ è relativamente compatta; allora dalla (7) si ottiene che u_n è relativamente compatta. C.V.D.

3. In tutto questo §, come anche nel successivo, supporremo sempre che siano verificate le ipotesi (*a*)-(*e*). Per $u, v \in \mathring{W}^1(\Omega)$ poniamo:

$$((u, v)) = \int_\Omega \sum_{i,k} a_{i,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx. \tag{8}$$

(8) è un prodotto scalare in $\mathring{W}^1(\Omega)$ e la norma $\| u \|^2 = ((u, u))$ è equivalente a quella usuale. Indicato con B l'operatore di $\mathring{W}^1(\Omega)$ in sè, definito dalla

$$((B(u), v)) = \int_\Omega \psi(x, u(x)) \, v(x) \, dx \qquad \forall v \in \mathring{W}^1(\Omega),$$

si ha che la (2) è equivalente all'equazione

$$u - B(u) = 0 \qquad u \in \mathring{W}^1(\Omega). \tag{3}$$

B è un operatore-gradiente infatti si ha

$$B(u) = \text{grad}\, b(u) \qquad \text{con} \quad b(u) = \int_0^1 ds \int_\Omega \psi(x, su(x)) \, u(x) \, dx.$$

Si osservi che le relazioni precedenti hanno senso in quanto $\psi(x, t)$ verifica, assieme alla sua derivata $\psi_t(x, t)$, alle relazioni (*e*). Poichè inoltre $\psi(x, t)$ è di classe $\mathcal{C}^2_t$ rispetto a t e anche $\psi_{tt}(x, t)$ verifica una condizione di limitazione di crescenza (ipotesi (*e*)), si ha che il funzionale

$$g(u) = \| u \|^2 - ((B(u), u)) \qquad u \in \mathring{W}^1(\Omega)$$

è di classe $\mathcal{C}^2$. Inoltre le soluzioni di (3) si trovano sicuramente sulla varietà

$$M = \{u : u \in \mathring{W}^1(\Omega), g(u) = 0, u \neq 0\}.$$

Sempre in virtù dell'ipotesi (*e*), si vede che il $\operatorname{grad} g(u)$ soddisfa a

$$((\operatorname{grad} g(u), u)) = 2\|u\|^2 - \int_\Omega [\psi_t(x, u(x))\, u^2(x) + \psi(x, u(x))\, u(x)]\, dx$$

quindi se $u \in M$ si ha che: $((\operatorname{grad} g(u), u)) = \int_\Omega [\psi(x, u(x))\, u(x) - \psi_t(x, u(x))\, u^2(x)]\, dx < 0$ per $u \neq 0$ perchè $\alpha_t > 0$ per $t > 0$ per ipotesi.

Dunque M è una varietà regolare di codimensione 1 in $\mathring{W}^1(\Omega)$. Consideriamo poi il funzionale

$$f(u) = \frac{1}{2}((B(u), u)) - b(u).$$

Sempre per l'ipotesi (*e*) si ha che f è di classe $\mathcal{C}^2$ e sfruttando il fatto che $\alpha_t(x, t)$ è strettamente positiva per $t > 0$ si vede facilmente che risulta:

$$(9) \qquad f(u) > 0 \quad \text{per} \quad u \neq 0, \qquad ((\operatorname{grad} f(u), u)) \neq 0 \quad \text{per} \quad u \neq 0.$$

Sia ora u un punto critico di $f/_M$: esiste un λ tale che $\operatorname{grad} f(u) = \lambda \operatorname{grad} g(u)$. Moltiplicando scalarmente per u si ottiene:

$$\frac{1}{2}((\operatorname{grad}((B(u), u)), u)) - ((B(u), u)) = 2\lambda \left[\|u\|^2 - \frac{1}{2}((\operatorname{grad}((B(u), u)), u))\right].$$

Ricordando che su M si ha $\|u\|^2 = ((B(u), u))$ e che $((\operatorname{grad} g(u), u)) \neq 0$ si trova che $2\lambda = -1$ e di conseguenza che $u = B(u)$. Possiamo riassumere tutto ciò nel seguente Lemma:

LEMMA 3.1. *M è una varietà regolare di codimensione* 1 *in* $\mathring{W}^1(\Omega)$; *i punti critici di* $f/_M$ *sono tutti e soli le soluzioni di* (3).

Nel seguito ci saranno utili delle ulteriori proprietà di g ed f. Esse si dimostrano facilmente osservando che nell'ipotesi (*e*) r è stato preso strettamente minore di $\frac{n+2}{n-2}$.

LEMMA 3.2. *$f(u)$ e $g(u)$ sono funzionali di classe $\mathcal{C}^2$ debolmente continui. Inoltre* $\operatorname{grad} f(u)$ *è compatto, mentre* $\operatorname{grad} g(u)$ *si può esprimere come* $u - K(u)$, *con* K *operatore compatto.*

4. In vista di applicare il Teorema 2.2, cominciamo con lo studiare le proprietà omotopiche di M; a questo scopo dimostriamo dapprima il seguente Lemma:

LEMMA 4.1. *Esiste un* $\varepsilon > 0$, *tale che per ogni* $u \in M$ *si ha* $\|u\| \geq \varepsilon$.

Dimostrazione. Vista la definizione di M, basterà dimostrare che esiste una sfera U di centro l'origine e raggio $\varepsilon > 0$, tale che $\forall u \in U \setminus \{0\}$ si abbia $g(u) > 0$. Essendo $g(0) = 0$, il Lemma sarà quindi provato, non appena si mostrerà che $u = 0$ è un punto di minimo relativo proprio per g. Poichè g è di classe $\mathcal{C}^2$ (Lemma 3.2.) basterà dimostrare che $g''(0)[v][v] > 0$ (3). Risulta:

$$g''(u)[v][w] = 2((v, w)) - 2\int_\Omega \psi_t(x, u(x))\, v(x)\, w(x)\, dx -$$
$$- \int_\Omega \psi_{tt}(x, u(x))\, u(x)\, v(x)\, w(x)\, dx.$$

Poichè $\psi_t(x, 0) = 0$, si deduce che $g''(0)[v][v] > 0$. C.V.D.

Passiamo ora allo studio della categoria di M:

LEMMA 4.2. *M è invariante rispetto alla simmetria* $j: u \to -u$, *ed è omeomorfa ad* $S = \{u : u \in \mathring{W}^1(\Omega), \|u\| = 1\}$ *con omeomorfismo compatibile con* j. *Quindi, indicata con* $\tilde{M}$ *la varietà ottenuta identificando i punti antipodali di* M, *si ha che* $\operatorname{cat}(\tilde{M}; \tilde{M}) = +\infty$.

Dimostrazione. Sia $u \in S$. Calcoliamo il

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2}(\|tu\|^2 - ((B(tu), tu))) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \int_\Omega \alpha(x, tu(x))\, u^2(x)\, dx\right). \tag{10}$$

Poichè l'insieme degli $x \in \Omega$ tali che $u(x) \neq 0$ è di misura positiva, e poichè per ipotesi $\lim_{s\to\pm\infty} \alpha(x, s) = +\infty$ (per quasi tutti gli $x \in \Omega$), si deduce che il limite (10) vale $-\infty$. Allora per t abbastanza grande si ha che $g(tu) < 0$; d'altra parte, ragionando come nel Lemma 4.1, si vede che esiste un $\varepsilon > 0$, tale che per $t = \varepsilon$ risulta $g(tu) > 0$. Quindi esiste uno ed un solo t, dipendente da $u \in S$, tale che $tu \in M$: l'unicità dipende dal fatto che essendo (vedi § 3) $((\operatorname{grad} g(u), u)) < 0$ per $u \neq 0$, se $t'u$ e $t''u$ appartenessero ad M ($u \in S$ fissato) allora

$$g(t'u) - g(t''u) = \int_{t''}^{t'} ((\operatorname{grad} g(su), u))\, ds = 0 \Longleftrightarrow t' = t''.$$

Inoltre da $((\operatorname{grad} g(u), u)) \neq 0$ segue anche che t dipende con continuità da u. Poichè $\psi(x, t) = -\psi(x, -t)$, questo omeomorfismo commuta con j in quanto allora si ha $g(-tu) = g(tu)$. Analogamente si verifica che se $v \in M$ anche $-v \in M$. Dunque $\tilde{M}$ è omeomorfo allo spazio proiettivo $P(S)$ e quindi $\operatorname{cat}(\tilde{M}; \tilde{M}) = \operatorname{cat}(P(S); P(S)) = +\infty$. Il Lemma risulta così completamente dimostrato.

(3) Con $g''(0)[v][v]$ si intende il valore che l'applicazione bilineare $g''(0)$ assume nel punto (v, v).

Passiamo ora a provare che $f/_{\mathrm{M}}$ verifica l'ipotesi (P–S); dimostriamo prima il seguente Lemma:

LEMMA 4.3. *Per ogni* $u \in \mathrm{M}$ *risulta* $f(u) \geq \frac{1}{6} \|u\|^2$.

Dimostrazione. Risulta:

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x)\, \psi(x, u(x))\, dx - \int_0^1 ds \int_{\Omega} u(x)\, \psi(x, su(x))\, dx =$$

$$= \int_0^1 ds \int_{\Omega} su^2(x) \{\alpha(x, u(x)) - \alpha(x, su(x))\}\, dx .$$

Poichè per l'ipotesi (d) si ha che $\alpha(x, t) - \alpha(x, st) \geq (1 - s)\, \alpha(x, t)$ $\forall s \in [0, 1]$, si deduce che:

$$f(u) \geq \int_0^1 ds \int_{\Omega} s(1 - s)\, u^2(x)\, \alpha(x, u(x))\, dx = \frac{1}{6} \int_{\Omega} u(x)\, \psi(x, u(x))\, dx .$$

Ma per ogni $u \in \mathrm{M}$ si ha che $\|u\|^2 = \int_{\Omega} \psi(x, u(x))\, u(x)\, dx$ e quindi dalla (11) segue la conclusione C.V.D.

LEMMA 4.4. *Per ogni* $s > 0$ *esiste un* $\mathrm{R} > 0$ *tale che* $\mathrm{M}^s \subseteq \{u : \|u\| \leq \mathrm{R}\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata conseguenza del Lemma 4.3. C.V.D.

Un'altra conseguenza del Lemma 4.3. è che $f(u)$ si mantiene discosta da zero per $u \in \mathrm{M}$. Precisamente:

LEMMA 4.5. *Esiste un* $h > 0$ *tale che per ogni* $u \in \mathrm{M}$ *risulti* $f(u) \geq h > 0$.

Dimostrazione. L'affermazione discende dal Lemma 4.1. e dal Lemma 4.3. C.V.D.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente Lemma:

LEMMA 4.6. $f/_{\mathrm{M}}$ *verifica l'ipotesi* (P–S).

Dimostrazione. Dal Lemma 3.2 si ha che $\operatorname{grad} f(u)$ è compatto e che $\operatorname{grad} g(u) = u - \mathrm{K}(u)$ con K operatore compatto. Inoltre dal Lemma 4.4 segue che M^s è limitato per ogni s. La conclusione voluta seguirà allora dal Lemma 2.4, non appena si proverà che $\operatorname{grad} f(u)$ si mantiene discosto da zero in M^s per ogni s. Per dimostrare questa affermazione ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una successione u_n, $u_n \in \mathrm{M}^s$, per un s fissato, e con $\operatorname{grad} f(u_n) \to 0$. Poichè M^s è limitato, da u_n è possibile estrarre una sottosuccessione (che indicheremo ancora con u_n) convergente debolmente a $\bar{u}$. Poichè f è debolmente continua (Lemma 3.2.) e poichè, per il Lemma 4.5, si ha che $f(u_n) \geq h > 0$, si trova che:

$$f(\bar{u}) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) > 0 .$$

Quindi $\bar{u} \neq 0$. Inoltre si avrebbe:

$$((\operatorname{grad} f(\bar{u}), \bar{u})) = \lim_{n \to +\infty} ((\operatorname{grad} f(u_n), u_n)) = 0.$$

Ma per la (9) questo sarebbe possibile solo se $\bar{u} = 0$, e ciò è assurdo. C.V.D.

Si può ora provare il risultato voluto:

TEOREMA 4.7. *Sia* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *un aperto limitato e siano* $a_{i,k}(x)$ *e* $\psi(x, t)$ *funzioni soddisfacenti alle ipotesi* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) *ed* (*e*). *Allora* (2) *ha infinite soluzioni.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.1 le soluzioni di (2) sono i punti critici di $f/_{\mathrm{M}}$. M è una varietà regolare di codimensione 1 in $\mathring{\mathrm{W}}^1(\Omega)$; f è un funzionale di classe $\mathcal{C}^2$ inferiormente limitato e verifica l'ipotesi (P–S) su M (Lemma 4.6). Inoltre per l'ipotesi (*c*) f è un funzionale pari e quindi, considerato su $\tilde{\mathrm{M}}$, ha, per il Teorema 2.2, un numero di punti critici almeno eguale a cat $(\tilde{\mathrm{M}}; \tilde{\mathrm{M}})$. Per il Lemma 4.2 questi punti critici sono allora infiniti. C.V.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] BROWDER F. E., *Infinite dimensional manifolds and non-linear elliptic eigenvalue problems*, « Ann. Math. », *82*, 459–477 (1965).

[2] HEMPEL J. A., *Multiple solutions for a class of non-linear boundary value problems*, « Ind. Univ. Math. J. », *20*, 983–999 (1971).

[3] PALAIS R. S., *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, « Topology », *5*, 115–132 (1966).

[4] SCHWARTZ J. T., *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, « Comm. Pure Appl. Math. », *17*, 307–315 (1964).