Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mehmet Namik Oguztöreli

Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 653–659.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_653_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron* (*). Nota III di Mehmet Namik Oğuztöreli, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Summary. – In this paper we investigate a Goursat problem for a polyvibrating equation of D. Mangeron, extending certain results of M. Picone and of the Author.

Si deve all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone la preziosissima spinta a proseguire le nostre ricerche concernenti le equazioni di Mangeron. In ciò che segue si inizia lo studio di vari problemi concernenti tali equazioni, atti a dare la risposta alla domanda formulata in una recentissima lettera del Nostro Amatissimo Maestro (1), e cioè:

Se in quelle equazioni comparissero derivate parziali d'ordine inferiore alle derivate parziali che stiamo considerando, continuerebbero a sussistere i risultati già conseguiti ed in caso contrario come andrebbero modificati?

1. Siano $g(x)$ ed $h(y)$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ monotone, rispettivamente, negli intervalli $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$ e soddisfacenti le condizioni

$$g(0) = h(0) = 0 \quad , \quad 0 \leq g'(0)\, h'(0) < 1 \, , \tag{1}$$
$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2} x \quad , \quad 0 \leq h(y) \leq \frac{1}{2} y \, .$$

Siano inoltre $G_k(x)$ e $H_k(y)$ funzioni di classe $\mathcal{C}^2$, rispettivamente, nei medesimi intervalli $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$, soddisfacenti le condizioni

$$G_k(0) = H_k(0) \qquad (k = 0 \, , 1) \, . \tag{2}$$

Si consideri l'equazione polivibrante di Mangeron

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left[p(x, y)\, \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x\, \partial y} - \lambda q(x, y)\, u(x, y)\right] = \tag{3}$$
$$= \lambda r(x, y)\, u(x, y) + s(x, y) \, ,$$

ove $p(x, y)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$ e $s(x, y)$ sono funzioni note di classe $\mathcal{C}^1$ nel quadrato $\mathfrak{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \alpha \, , 0 \leq y \leq \alpha\}$, λ è un parametro e $u = u(x, y)$ è la funzione incognita. Si suppone che sia $p(x, y) \neq 0$ nel $\mathfrak{D}$.

In questo lavoro si studia il problema di Goursat che consiste nella determinazione della funzione $u(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^2$ in $\mathfrak{D}$, possedente ivi la derivata

(*) This work was partly supported by the National Research Council of Canada under the Grant NRC–A4345 through the University of Alberta.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

(1) Lettera dell'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone dal 13 marzo 1972 indirizzata a M. N. Oğuztöreli e D. Mangeron.

seconda totale di Picone [1]–[2], $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, continua e soddisfacente l'equazione di Mangeron (3) e le condizioni di Goursat

$$\left.\frac{\partial^{2k} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^k}\right|_{y=g(x)} = G_k(x) \quad (0 \leq x \leq \alpha), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^k}\right|_{x=h(y)} = H_k(y) \quad (0 \leq y \leq \alpha),$$

essendo $k = 0, 1$. Diciamo pure che il problema di Goursat di cui sopra era stato considerato nel caso in cui $p(x, y) \equiv 1$ e $q(x, y) \equiv 0$ nella nostra Nota [3].

2. Due integrazioni successive applicate all'equazione (3) conducono, rispettivamente, alle eguaglianze

$$p(x, y)\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \int_0^x d\xi \int_0^y s(\xi, \eta)\, d\eta + \tag{5}$$

$$+ \lambda \left\{ q(x, y)\, u(x, y) + \int_0^x d\xi \int_0^y r(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\eta \right\} + [\varphi_1(x) + \psi_1(y)]$$

e

$$u(x, y) = \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi, \eta)\, d\eta + \tag{6}$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y [\varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta)]\, d\eta + \lambda \left\{ \int_0^x d\xi \int_0^y \frac{q(\xi, \eta)}{p(\xi, \eta)}\, u(\xi, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\eta \right\} + [\varphi_0(x) + \psi_0(y)],$$

ove $\varphi_k(x)$ e $\psi_k(y)$ $(k = 0, 1)$ sono funzioni arbitrarie di classe $\mathcal{C}^1$ in $0 \leq x \leq \alpha$ e, rispettivamente, in $0 \leq y \leq \alpha$.

E pertanto, in virtù delle condizioni di Goursat (4), si ricava dall'equazione (5)

$$\varphi_1(x) + \psi_1[g(x)] = p[x, g(x)]\, G_1(x) - \lambda q[x, g(x)]\, G_0(x) - \tag{7}$$

$$- \int_0^x d\xi \int_0^{g(x)} s(\xi, \eta)\, d\eta - \lambda \int_0^x d\xi \int_0^{g(x)} r(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\eta,$$

come pure

$$(8)\qquad \varphi_1[h(y)] + \psi_1(y) = p[h(y), y]\,H_1(y) - \lambda q[h(y), y]\,H_0(y) - \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y s(\xi, \eta)\,d\eta - \lambda \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y r(\xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\eta .$$

Eliminando dalle equazioni (7) e (8) la funzione ψ_1, si ottiene, dopo una serie di calcoli e procedimenti algoritmici che non sono nè tanto facili nè tanto elementari, l'equazione funzionale di Abel–Schröder

$$(9)\qquad \varphi_1[f(x)] - \varphi_1(x) = F_1(x) + \lambda(R_1 u)(x),$$

ove si è posto $f(x) \equiv h[g(x)]$ e

$$(10)\qquad F_1(x) = \{p[f(x), g(x)]\,H_1[g(x)] - p[x, g(x)]\,G_1(x)\} + \lambda\{q[x, g(x)]\,G_0(x) - q[f(x), g(x)]\,H_0[g(x)]\} + \int_{f(x)}^{x} d\xi \int_0^{g(x)} s(\xi, \eta)\,d\eta$$

come pure

$$(11)\qquad (R_1 u)(x) = \int_{f(x)}^{x} d\xi \int_0^{g(x)} r(\xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\eta .$$

È ben chiaro che la funzione $F_1(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $0 \le x \le \alpha$ e l'operatore $(R_1 u)(x)$ è pur esso di classe $\mathcal{C}^1$ nel medesimo intervallo per ogni $u(x, y)$ continua in $\mathfrak{D}$. E pertanto, l'equazione (9) possiede una soluzione di forma

$$(12)\qquad \varphi_1(x) = \gamma_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \{F_1[f^n(x)] + \lambda(R_1 u)[f^n(x)]\},$$

ove γ_1 è una costante e $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x), \cdots, f^{n+1}(x) = f[f^n(x)], \cdots$. Si ha inoltre, in virtù delle equazioni (8) e (12),

$$(13)\qquad \psi_1(y) = -\gamma_1 + p[h(y), y]\,H_1(y) - \lambda q[h(y), y]\,H_0(y) - \sum_{n=0}^{\infty} F_1[f^n(h(y))] - \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y s(\xi, \eta)\,d\eta - \lambda\left\{\int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y r(\xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\eta + \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 u)[f^n(h(y))]\right\}.$$

Poichè la costante γ_1 sparisce nella somma $\varphi_1(x) + \psi_1(y)$, si può prendere $\gamma_1 = 0$, e, dunque, le funzioni $\varphi_1(x)$ e $\psi_1(y)$ sono determinate in un modo univoco e si ha

$$(14)\qquad \varphi_1(x) + \psi_1(y) = M_1(x, y) + \lambda(T_1 u)(x, y),$$

ove si è posto

$$
\begin{aligned}
(15)\qquad \mathrm{M}_1(x\,,y) &= p\,[h(y)\,,y]\,\mathrm{H}_1(y) - \lambda q\,[h(y)\,,y]\,\mathrm{H}_0(y) - \\
&- \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi \int_0^{y} s(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta + \sum_{n=0}^{\infty} \{\mathrm{F}_1[f^n(x)] - \mathrm{F}_1[f^n(h(y))]\}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad (\mathrm{T}_1 u)(x\,,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{(\mathrm{R}_1 u)[f^n(x)] - (\mathrm{R}_1 u)[f^n(h(y))]\} - \\
&- \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi \int_0^{y} r(\xi\,,\eta)\,u(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,.
\end{aligned}
$$

Sostituendo ora nell'equazione (6) ciò che ne risulta dall'eguaglianza (14) ed applicando le condizioni di Goursat (4) pel caso in cui $k = 0$, si ottiene la seguente coppia di equazioni funzionali:

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad \varphi_0(x) + \psi_0[g(x)] &= \mathrm{G}_0(x) - \int_0^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{g(x)} \frac{\mathrm{d}\eta_1}{p(\xi_1\,,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} \mathrm{d}\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta - \\
&- \int_0^{x} \mathrm{d}\xi \int_0^{g(x)} \mathrm{M}_1(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta - \lambda \Big\{ \int_0^{x} \mathrm{d}\xi \int_0^{g(x)} \Big[(\mathrm{T}_1 u)(\xi\,,\eta) + \frac{q(\xi\,,\eta)}{p(\xi\,,\eta)}\,u(\xi\,,\eta)\Big]\,\mathrm{d}\eta + \\
&+ \int_0^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{g(x)} \frac{\mathrm{d}\eta_1}{p(\xi_1\,,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} \mathrm{d}\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi\,,\eta)\,u(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta \Big\}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad \varphi_0[h(y)] + \psi_0(y) &= \mathrm{H}_0(y) - \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{y} \frac{\mathrm{d}\eta_1}{p(\xi_1\,,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} \mathrm{d}\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta - \\
&- \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi \int_0^{y} \mathrm{M}_1(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta - \lambda \Big\{ \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi \int_0^{y} \Big[(\mathrm{T}_1 u)(\xi\,,\eta) + \frac{q(\xi\,,\eta)}{p(\xi\,,\eta)}\,u(\xi\,,\eta)\Big]\,\mathrm{d}\eta + \\
&+ \int_0^{h(y)} \mathrm{d}\xi_1 \int_0^{y} \frac{\mathrm{d}\eta_1}{p(\xi_1\,,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} \mathrm{d}\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi\,,\eta)\,u(\xi\,,\eta)\,\mathrm{d}\eta \Big\}.
\end{aligned}
$$

Eliminando ora dalle equazioni (17) e (18) la funzione ψ_0, si ricava l'equazione di Abel–Schröder

$$
(19)\qquad \varphi_0[f(x)] - \varphi_0(x) = \mathrm{F}_0(x) + \lambda(\mathrm{R}_0 u)(x)\,,
$$

ove si è posto

$$\text{(20)} \qquad F_0(x) = H_0[g(x)] - G_0(x) +$$

$$+ \int_{f(x)}^{x} d\xi_1 \int_0^{g(x)} \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi, \eta)\, d\eta + \int_{f(x)}^{x} d\xi \int_0^{g(x)} M_1(\xi, \eta)\, d\eta$$

e

$$\text{(21)} \qquad (R_0 u)(x) = \int_{f(x)}^{x} d\xi \int_0^{g(x)} \left[(T_1 u)(\xi, \eta) + \frac{q(\xi, \eta)}{p(\xi, \eta)} u(\xi, \eta)\right] d\eta +$$

$$+ \int_{f(x)}^{x} d\xi_1 \int_0^{g(x)} \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\eta .$$

È ben chiaro che la funzione $F_0(x)$ è di classe $\mathfrak{C}^1$ in $0 \leq x \leq \alpha$ come pure lo è $(R_0 u)(x)$ per ogni funzione continua $u(x, y)$.

Utilizzando i procedimenti or ora eseguiti, si può dimostrare senza difficoltà che si ha pure

$$\text{(22)} \qquad \varphi_0(x) + \psi_0(y) = M_0(x, y) + \lambda (T_0 u)(x, y),$$

ove si è posto

$$\text{(23)} \qquad M_0(x, y) = H_0(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \{F_0[f^n(x)] - F_0[f^n(h(y))]\} -$$

$$- \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^{y} M_1(\xi, \eta)\, d\eta - \int_0^{h(y)} d\xi_1 \int_0^{y} \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi, \eta)\, d\eta$$

e

$$\text{(24)} \qquad (T_0 u)(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(R_0 u)[f^n(x)] - (R_0 u)[f^n(h(y))]\} +$$

$$+ \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^{y} \left[(T_1 u)(\xi, \eta) + \frac{q(\xi, \eta)}{p(\xi, \eta)} u(\xi, \eta)\right] d\eta +$$

$$+ \int_0^{h(y)} d\xi_1 \int_0^{y} \frac{d\eta_1}{p(\xi_1, \eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\eta .$$

Dopo aver sostituito nell'equazione (6) la relazione (22), si ottiene l'equazione integrale

$$\text{(25)} \qquad u(x, y) = M(x, y) + \lambda (Tu)(x, y),$$

ove si è posto

$$M(x,y) = M_0(x,y) + \int_0^x d\xi \int_0^y M_1(\xi,\eta)\, d\eta + \tag{26}$$

$$+ \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \frac{d\eta_1}{p(\xi_1,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} s(\xi,\eta)\, d\eta$$

e

$$(Tu)(x,y) = (T_0 u)(x,y) + \tag{27}$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y \left[(T_1 u)(\xi,\eta) + \frac{q(\xi,\eta)}{p(\xi,\eta)}\, u(\xi,\eta)\right] d\eta +$$

$$+ \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \frac{d\eta_1}{p(\xi_1,\eta_1)} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} r(\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\eta .$$

Si può verificare senza difficoltà che l'operatore lineare T applica lo spazio di Banach $\mathcal{C}$ di tutte le funzioni continue in $\mathfrak{D}$, provvisto di una norma uniforme, in sè stesso ed è limitato. Epperciò, l'equazione (25) ammette, per λ sufficientemente piccolo, una *soluzione unica* in $\mathcal{C}$ e questa soluzione è pur essa di classe $\mathcal{C}^3$ e vi possiede la derivata totale seconda di Picone continua. Per conseguenza, il problema di Goursat (3)–(4) ammette nel caso or ora considerato una soluzione unica.

3. In una serie di lavori seguenti ci occuperemo, pur tenendo conto dei risultati conseguiti sin'ora dal D. Mangeron, L. E. Krivoshein, G. Birkhoff, W. Gordon e S. Easwaran ed altri ancora [4]–[10], di certe altre estensioni alle equazioni polivibranti di Mangeron della ingente mole di profondissimi risultati dovuti all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone, da Lui esposti nelle Sue celeberrime Memorie concernenti equazioni alle derivate parziali del secondo ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti, pubblicate nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » negli anni 1910 [11] e 1911 [12] e ben giustamente riprodotte a Roma nel 1969 in fotocopie.

BIBLIOGRAFIA

[1] MAURO PICONE, *La mia vita*. Aziende tipografiche eredi Dott. G. Bardi, Roma, 1972.

[2] MAURO PICONE, *Mauro Picone, Vita ed Opera*. « Annuario dell'Accad. dei XL », Roma, 1–29 (1968).

[3] M. N. OĞUZTÖRELI, *a*) *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron*, II. « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8–a (in stampa); *b*) M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON, *Darboux problem for a polyvibrating equation. Solution as an* F–*Function*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *67*, 1488–1492 (1970). *c*) M. N. OĞUZTÖRELI e S. EASWARAN, *A Goursat problem for a high order Mangeron equation*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 8–a, *50*, 650–653 (1971).

[4] D. MANGERON, *a) Sopra un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali di quart'ordine con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. sci. fis., mat., Napoli », s. 4–a, *2*, 29–40 (1932); *b) Problemi al contorno non lineari per equazioni a derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », s. 6–a, *16*, 305–310 (1932).

[5] D. MANGERON, *Problèmes à la frontière caractéristique et non caractéristique concernant les équations polyvibrantes*, « C. r. Acad. Sci. », Paris, *204*, 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937); *266A*, 870–873; 976–979; 1050–1052; 1103–1106; 1121–1124 (1968); « J. Math. Anal. a. Appl. », *9*, 141–146 (1964); « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », *1–4* (1946–1949); nuova serie, *5–22* (1955–1972).

[6] L. E. KRIVOSHEIN, *Metodo di Mangeron spettante alla risoluzione di certe classi di equazioni integro–differenziali.* (in Russo). Trudy tretiei Sibirskoi Konferentsii po Matematike i Mekhanike, Tomsk, 1964.

[7] F. S. ROSSI, *Il metodo di Mangeron nella risoluzione di certe equazioni alle derivate parziali d'ordine superiore*, « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », *12* (16), 17–24 (1965).

[8] G. BIRKHOFF e W. GORDON, *On the draftsman's and related equations*, « Intern. J. Approx. Theory », *1*, 199–208 (1968).

[9] S. EASWARAN, *A Study on certain higher order partial differential equations of Mangeron.* Tesi di Laurea eseguita sotto la direzione del prof. M. N. Oğuztöreli. Dept. of Mathematics, University of Alberta, 1972, 147 p.

[10] JU. M. BEREZANSKI, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, « Amer. Math. Soc. transl. monographs », Cap. IV, p. 756, 787 (1968).

[11] M. PICONE, *a) Sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti.* « Rend. Circolo Mat. Palermo », *30*, 349–376 (1910); *b) Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono.* Ibidem, *31*, 133–190 (1911).

[12] M. PICONE, *Su alcuni problemi di determinazione delle soluzioni di equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine di tipo iperbolico.* « Atti Accad. Sci., Istituto di Bologna, Cl. sci. fis. », Anno 258°, serie XII, *7*, 60–71 (1970).