Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jean-Philippe Labrousse

Une caractérisation topologique des générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques et de contractions sur un espace de Hilbert

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 631–636.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_631_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Une caractérisation topologique des générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques et de contractions sur un espace de Hilbert.* Nota di JEAN-PHILIPPE LABROUSSE, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Sia $\mathcal{C}(H, K)$ l'insieme degli operatori chiusi di uno spazio di Hilbert H in uno spazio di Hilbert K e se $A, B \subset \mathcal{C}(H, K)$ sia $g(A, B)$ la distanza proiettiva fra A e B (cfr. ad esempio [2]).

Utilizzando g si dimostra una condizione necessaria e sufficiente affinchè i prodotti AB e BA esistano e siano tali che un fissato $\lambda \in C$ appartenga a $\rho(AB) \cap \rho(BA)$ [$\rho(T)$ insieme risolvente di T].

Ponendo $H = K$ e $B = I$ si deduce, sempre utilizzando g, una caratterizzazione dei generatori infinitesimali di semi-gruppi analitici e di contrazione.

Soit H un espace de Hilbert complexe et soient M et N deux sous-espaces fermés de H. On pose, comme dans [2]:

$$g(M, N) = \| P_M - P_N \| \tag{1}$$

où P_M et P_N sont respectivement les projections orthogonales de H sur M et sur N. Posons également:

$$\delta(M, N) = \| (I - P_N) P_M \| . \tag{2}$$

Finalement rappelons le Corollaire 3.1 de [2]:

$$M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = \{0\} \Rightarrow \delta(M, N) = \delta(N, M) = g(M, N). \tag{3}$$

LEMME. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $g = g(M, N) < 1$.

b) $M + N^{\perp} = H \quad ; \quad M \cap N^{\perp} = \{0\}$:

c) *Il existe une projection* Q *de* H *sur* M *telle que* $I - Q$ *soit une projection de* H *sur* $N^{\perp}$.

Démonstration. $a) \Rightarrow b)$. Soit $u \in M \cap N^{\perp}$; alors:

$$(P_M - P_N) u = (I - P_N) u = u$$

d'où

$$\| u \| = \| (P_M - P_N) u \| \leq g(M, N) \| u \| < \| u \|$$

et par conséquent $u = 0$; donc $M \cap N^{\perp} = \{0\}$.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

De même on voit que $g < 1 \Rightarrow M^{\perp} \cap N = \{0\}$ d'où: $(M^{\perp} \cap N)^{\perp} = \overline{M + N^{\perp}} = H$. Il reste donc à montrer que $M + N^{\perp}$ est fermé.

Soit donc $u \in M + N^{\perp}$. Alors $u = v + w$ avec $v \in M$ et $w \in N^{\perp}$. On a:

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{R}e\,(v\,,w)_{\mathrm{H}}\,.$$

Donc:

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|u\|^2 - 2\,\mathrm{R}e\,(\mathrm{P_M}\,v\,,(\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,w)_{\mathrm{H}} = \|u\|^2 - 2\,\mathrm{R}e\,((\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,\mathrm{P_M}\,v\,,w)_{\mathrm{H}}$$

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\,\|(\mathrm{P_M}-\mathrm{P_N})\,\mathrm{P_M}\,v\|\cdot\|w\| \leq \|u\|^2 + 2g\,\|v\|\cdot\|w\|$$

d'où finalement:

$$\|v\|^2 \leq \|u\|^2/(1-g^2) \qquad ; \qquad \|w\|^2 \leq \|u\|^2/(1-g^2)\,. \tag{4}$$

Soit maintenant $u \in H$; alors il existe une suite de Cauchy $\{u_n\}$ avec $u_n = v_n + w_n \in M + N^{\perp}$ convergent vers u. On déduit de (4) que $\{v_n\}$ et $\{w_n\}$ sont des suites de Cauchy convergent respectivement vers $v \in M$ et $w \in N$, d'où $u = v + w \in M + N^{\perp}$.

b) $\Rightarrow$ *c)*. Soit $u \in H$; alors $u = v + w$ avec $v \in M$ et $w \in N^{\perp}$ uniquement déterminés. Posons: $Qu = v$, $(I - Q)\,u = w$. Q est évidemment linéaire et idempotent (donc I — Q aussi). Comme Q et I — Q sont visiblement surjectifs, il reste à montrer que Q est continu, en utilisant le Théorème du graphe fermé.

Soit $\{u_n\} \subseteq H$ telle que:

$$u_n \rightarrow u \qquad ; \qquad Qu_n \rightarrow v\,.$$

Alors $v \in M$ et $(I - Q)\,u_n \rightarrow w \in N^{\perp}$. Donc $u = v + w$ et $Qu = v$.

c) $\Rightarrow$ *a)*. Posons $\mathrm{Q_N} = \mathrm{Q}|_{\mathrm{N}}$. On a: $\|\mathrm{Q_N}\| \leq \|\mathrm{Q}\|$ et on voit facilement que $\mathrm{Q_N}$ est une bijection de N sur M. En effet, si $u \in N$ et $\mathrm{Q_N}\,u = 0$ on a: $Qu = 0$ et donc $u \in N^{\perp} \cap N = \{0\} \Rightarrow u = 0$.

Soit

$$v \in M \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad v_1 \in N \quad , \quad v_2 \in N^{\perp}.$$

Alors:

$$v = Qv = Qv_1 = \mathrm{Q_N}\,v_1 \quad \text{et} \quad \|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|\mathrm{Q_N^{-1}}\,v\|^2 + \|(\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,v\|^2$$

et par conséquent:

$$\|\mathrm{Q_N^{-1}}\,v\|^2 = \|v\|^2 - \|(\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,\mathrm{P_M}\,v\|^2$$

d'où

$$\|v\|^2 = \|\mathrm{Q_N}\,\mathrm{Q_N^{-1}}\,v\|^2 \leq \|\mathrm{Q_N}\|^2\,(\|v\|^2 - \|(\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,\mathrm{P_M}\,v\|^2)$$

et finalement

$$\|(\mathrm{I}-\mathrm{P_N})\,\mathrm{P_M}\,v\|^2 \leq (1 - 1/\|\mathrm{Q_N}\|^2)\,\|v\|^2\,.$$

Donc:

$$\delta^2(M, N) \leq 1 - 1/\|Q_N\|^2 \leq 1 - 1/\|Q\|^2. \tag{5}$$

Or $c) \Rightarrow M \cap N^\perp = M^\perp \cap N = \{0\}$.

En effet:

$$u \in M \cap N^\perp \Rightarrow u = Qu + (I - Q)\, u = u + u \Rightarrow u = 0$$

$$u \in M^\perp \cap N \quad \text{et} \quad u = Qu + (I - Q)\, u \Rightarrow \|u\|^2 = 0 \Rightarrow u = 0\,.$$

Donc, en utilisant (3) on obtient:

$$g^2 = g^2(M, N) = \delta^2(M, N) \leq 1 - 1/\|Q\|^2 < 1\,. \tag{6}$$

REMARQUE. *A partir des inégalités* (4) *et* (6) *on trouve que quand l'une des trois conditions du Lemme est satisfaite on a*:

$$\|Q_N\| = \|Q\| = 1/\sqrt{1 - g^2}\,. \tag{7}$$

En inversant les rôles de M *et de* N *on trouve aussi* $\|Q\| = \|I - Q\|$.

Soit maintenant A un opérateur fermé à domaine dense $D(A) \subseteq H$, de $D(A)$ dans K et B un opérateur fermé à domaine dense $D(B) \subseteq K$ de $D(B)$ dans H, où K est un espace de Hilbert complexe. Soit $G(A)$ et $G(B^*)$ respectivement les graphes de A et de B^*. On pose:

$$g(A, B^*) = g(G(A), G(B^*)). \tag{8}$$

THÉORÈME 1. $g(A, B^*) < 1 \Longleftrightarrow AB$ *et* BA *sont respectivement des opérateurs fermés à domaines denses de* K *dans* K *et de* H *dans* H, *avec* $-1 \in \rho(AB) \cap \rho(BA)$ *où* $\rho(AB)$ *et* $\rho(BA)$ *sont respectivement les ensembles résolvants de* AB *et de* BA.

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons $g(A, B^*) < 1$. Alors d'après le Lemme on a: $G(A) \dotplus G(B^*)^\perp = H + K$. Donc si $f \in H$, il existe $u \in D(A)$ et $v \in D(B)$, uniquement déterminés, tels que:

$$\{f, 0\} = \{u, Au\} + \{Bv, -v\}.$$

Posons: $u = Rf$; $v = Sf$. On a:

$$\left.\begin{aligned} f &= Rf + BSf \\ 0 &= ARf - Sf \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = (I + BA)\, Rf\,.$$

Donc: $R : H \mapsto D(I + BA)$. En outre, comme $g(B^*, A) = g(A, B^*)$, on trouve de la même manière qu'il existe un opérateur R^* tel que

$$R^* : H \mapsto D(I + A^*B^*) \qquad \text{avec } \forall g \in H \quad (I + A^*B^*)\, R^*g = g\,.$$

Supposons maintenant que $g \perp R(H)$. Alors $\forall f \in H$ on a:

$$0 = (g, Rf)_H = ((I + A^*B^*)\, R^*g, Rf)_H = (R^*g, f)_H\,.$$

Donc

$$R^* g = 0 \Rightarrow g = (I + A^* B^*)\, R^* g = 0$$

ce qui entraîne que $D(I + BA) \supseteq R(H)$ est dense dans H.

Finalement soit $v \in D((I + BA)^*)$. Alors:

$$\forall u \in D(I + BA)\,,\ ((I + BA)\,u\,,\,v)_H = (u\,,\,v^*)_H = (u\,,\,(I + A^* B^*)\, R^* v^*)_H =$$

$$= ((I + BA)\,u\,,\,R^* v^*)_H \Rightarrow v = R^* v^*\,.$$

Donc

$$v \in D(I + A^* B^*) \qquad \text{et} \quad v^* = (I + A^* B^*)\, v\,.$$

Ainsi

$$D((I + BA)^*) \subseteq D(I + A^* B^*)\,.$$

Comme l'inclusion inverse est évidente, on a:

$$(I + BA)^* = I + A^* B^*$$

et de même

$$(I + A^* B^*)^* = I + BA\,.$$

Donc $I + BA$ est fermé, à domaine dense ($= R(H)$) et surjectif, ou encore $-1 \in \rho(BA)$. En inversant les rôles de A et de B et en utilisant l'égalité $g(A^*\,,\,B) = g(A\,,\,B^*)$ (cf. par exemple [2], Proposition 5.1) on complète la démonstration.

$\Rightarrow$) Si $-1 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)$

posons:

$$R_1 = (I + BA)^{-1} \ :\ H \longmapsto D(I + BA)$$

$$R_2 = (I + AB)^{-1} \ :\ K \longmapsto D(I + AB).$$

Alors $\forall \{f\,,g\} \in H + K$ si $u = R_1 f + BR_2 g$ et $v = AR_1 f - R_2 g$ on a:

$$\{f\,,g\} = \{u\,,\,Au\} + \{Bv\,,\,-v\}\,.$$

Donc

$$G(A) + G(B^*)^{\perp} = H + K\,.$$

En outre, $\{f\,,g\} \in G(A) \cap G(B^*)^{\perp} \Rightarrow g = Af$ et $f = -Bg$ et par conséquent $(I + BA)f = 0 \Rightarrow f = 0$. Donc $G(A) \cap G(B^*)^{\perp} = \{0\}$ et en utilisant le Lemme on voit que $g(A\,,\,B^*) < 1$.

REMARQUE. *Il ressort de cette démonstration que si nous notons encore* Q *la projection définie dans le Lemme et correspondant à* $M = G(A)$, *son expression dans* $H + K$ *est donnée par la matrice*:

$$Q = \begin{pmatrix} R_1 & BR_2 \\ AR_1 & I - R_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Le Théorème a comme première conséquence évidente:

COROLLAIRE 1. *Soit* $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, *et soient* φ *et* ψ *tels que* $\varphi + \psi = \arg \lambda$. *Alors*;

$$\lambda \in \rho(AB) \cap \rho(BA) \iff \exists t \in \mathbf{R}^+ \quad \text{avec} \quad g(e^{-i\varphi} A/t, -te^{i\psi} B^*/|\lambda|) < 1$$

$$\iff \forall t \in \mathbf{R}^+ g(e^{-i\varphi} A/t, -te^{i\psi} B^*/|\lambda|) < 1.$$

COROLLAIRE 2. *Soit* $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, *et soit* $\varphi = \arg \lambda$. *Alors si* $H = K$

(i) $\lambda \in \rho(A) \iff g(A/|\lambda|, -e^{i\varphi} I) < 1$

(ii) $\frac{1}{2}\, 1/(1 - g^2) \leq |\lambda|^2 \|(A - \lambda)^{-1}\|^2 + \|A(A - \lambda)^{-1}\|^2 \leq 1/(1 - g^2)$

où $g = g(A/|\lambda|, -e^{i\varphi} I)$.

Démonstration. (i) s'obtient à partir du Corollaire 1 en prenant $B = I$. Pour établir (ii) observons tout d'abord que si $B = -e^{-i\varphi} I$ la projection Q sur $G(A/|\lambda|)$ s'écrit:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda(A-\lambda)^{-1} & |\lambda|(A-\lambda)^{-1} \\ -\lambda/|\lambda|\, A(A-\lambda)^{-1} & A(A-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc si $f, g \in H$ on trouve:

$$\|Q\{f,g\}\|^2 = |\lambda|^2 \|(A-\lambda)^{-1}(-f + |\lambda| g/\lambda)\|^2 + \|A(A-\lambda)^{-1}(-f + |\lambda| g/\lambda)\|^2$$
$$\leq \{|\lambda|^2 \|(A-\lambda)^{-1}\|^2 + \|A(A-\lambda)^{-1}\|^2\} \|-f + |\lambda| g/\lambda\|^2$$
$$\leq 2\{|\lambda|^2 \|(A-\lambda)^{-1}\|^2 + \|A(A-\lambda)^{-1}\|^2\} (\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

D'autre part, si $u \in H$, prenons $f = -u/2$, $g = \lambda/|\lambda| \cdot u/2$. Alors:

$$|\lambda|^2 \|(A-\lambda)^{-1} u\|^2 + \|A(A-\lambda)^{-1} u\|^2 =$$
$$= \frac{1}{4} \|Q(\{-u, \lambda/|\lambda|\, u\})\|^2 \leq \frac{1}{2} \|Q\|^2 \cdot \|u\|^2.$$

Donc

$$|\lambda|^2 \|(A-\lambda)^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|Q\|^2 \quad ; \quad \|A(A-\lambda)^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|Q\|^2$$

et (ii) est démontré en utilisant (7).

THÉORÈME 2. *A est un générateur infinitésimal de semi-groupe analytique* $\iff \exists \varepsilon > 0, \forall \varphi \in]-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon[, \exists C_\varphi$ *telle que* $\forall t \in \mathbf{R}^+ \; g(A/t, -e^{i\varphi} I) \leq$ $\leq C_\varphi < 1$.

Démonstration. $\Rightarrow$) Soit $\lambda \in \rho(A)$; posons $\lambda = te^{i\varphi}$. Alors $g(A/t, -e^{i\varphi} I) < 1$ et de (ii) du Corollaire 2 et de la condition $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq C/|\lambda|$ on déduit que $1/(1 - g^2)$ est borné indépendamment de t et par conséquent que $g \leq C_\varphi < 1$ indépendamment de t.

$\Leftarrow$) On voit sans peine que $\rho(A)$ contient le secteur $-\pi/2 - \varepsilon < \arg \lambda < < \pi/2 + \varepsilon$. En outre, de (ii) du Corollaire 2 on déduit immédiatement que $|\lambda| \, \|(A - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \, 1/\sqrt{1 - C_\varphi^2}$ constante indépendante de λ.

THÉORÈME 3. *A est un générateur infinitésimal de semi-groupe de contractions* $\Longleftrightarrow \sup_{t>0} g(A/t, -I) = 1/\sqrt{2}$.

Démonstration. $\Leftarrow$) $g(A/t, -I) \leq 1/\sqrt{2} \Rightarrow 1 - g^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1/(1 - g^2) \leq 2$ et en utilisant encore (ii) du Corollaire 2 on trouve:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \qquad \|(A - \lambda)^{-1}\| \leq 1/|\lambda|$$

ce qui, étant donné que $\rho(A) \supseteq \mathbf{R}^+$, entraîne bien le résultat cherché.

$\Rightarrow$) Alors A est dissipatif, d'où si $\lambda \in \mathbf{R}^+$ on a:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|A(A - \lambda)^{-1} u - \lambda(A - \lambda)^{-1} u\|^2 \\ &= \|A(A-\lambda)^{-1} u\|^2 + \|(A-\lambda)^{-1} u\|^2 - 2\lambda \mathrm{R}e(A(A-\lambda)^{-1} u, (A-\lambda)^{-1} u)_H \\ &\geq \|A(A - \lambda)^{-1} u\|^2 + \|(A - \lambda)^{-1} u\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|Q(\{f, g\})\|^2 \leq \|f - g\|^2 \leq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$ d'où $\|Q\|^2 \leq 2$ ou encore $1/(1 - g^2) \leq 2 \quad g \leq 1/\sqrt{2}$.

REMARQUE 1. *En utilisant le Lemme 5.3 de* [3] *on déduit du Théorème 3 que l'ensemble des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions est fermé dans la topologie induite par g.*

DÉFINITION. *Soit* A, B $\in \mathcal{C}(H, K)$. *Posons*:

$$m(A, B) = \sup_{s \leq 1} g(sA, sB) \qquad , \qquad s \in \mathbf{R}^+$$

Il est évident que m est une métrique sur $\mathcal{C}(H, K)$.

REMARQUE 2. *On peut facilement démontrer à partir du Théorème 2 que l'ensemble des générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques est ouvert dans la topologie induite par m.*

Ajoutons en conclusion que le Théorème 1 se généralise facilement au cas où la condition $-1 \in \rho(AB) \cap \rho(BA)$ est remplacée par une condition du même type où l'ensemble résolvant de Fredholm (ou même le complément du spectre essentiel) joue le rôle de l'ensemble résolvant. De même on déduit facilement du Théorème 1 des résultats du type du Théorème 3.1, p. 208 de [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] KATO T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York (1966).

[2] LABROUSSE J. P., *Quelques Topologies sur des Espaces d'Opérateurs dans des Espaces de Hilbert et leurs Applications (I)*, «Dpt. de Math.», Nice 1971.

[3] LABROUSSE J. P., *On a Metric Space of Closed Operators on a Hilbert Space*, «Univ. Nac. Tucuman (Argentine), Rev.», ser. *A 16*, 45–77 (1966).