
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAVEL DOKTOR

**Su alcune relazioni tra una funzione armonica e la
funzione coniugata**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.5, p. 617–621.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_617_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Su alcune relazioni tra una funzione armonica e la funzione coniugata.* Nota di PAVEL DOKTOR, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — On some relations between a harmonic function and its conjugate.

Nel presente lavoro si tratta dei rapporti fra una funzione u in due variabili, reale ed armonica, e la funzione v coniugata della u . Le funzioni u, v soddisfano allora le condizioni

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(condizioni di Cauchy-Riemann) in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ che si assume limitato e semplicemente connesso con frontiera abbastanza buona. Diciamo che Ω ha una frontiera lipschitziana (o che $\Omega \in \mathcal{O}\mathcal{R}^{0,1}$) se $\partial\Omega$ è ricoperta con un numero finito di archi aperti su $\partial\Omega$ tali che ognuno di essi ammetta, rispetto ad un opportuno sistema di assi ξ_i, η_i , una rappresentazione del tipo

$$(3) \quad \eta_i = a_i(\xi_i)$$

dove a_i è una funzione definita in un intorno $(-\alpha, \alpha)$ di $\xi_i = 0$ ed ivi lipschitziana. Nel caso che ogni funzione a_i abbia la derivata continua scriviamo $\Omega \in \mathcal{O}\mathcal{R}^1$.

Le derivate in (1), (2) si prendono nel senso delle distribuzioni di Schwartz, ma poichè l'operatore di Laplace è ipoellitico esse si possono considerare anche nel senso classico. La condizione che Ω sia semplicemente connesso assicura quindi che la funzione v coniugata delle u esiste sempre (ed è determinata univocamente a meno di una costante additiva).

Sia $W_2^{(1)}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev, con la norma

$$(4 a) \quad \|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2$$

dove

$$(4 b) \quad \|u\|^2 = \|u\|_0^2 = \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy = \|u\|_{0, \Omega}^2.$$

Allora è quasi ovvio il seguente

TEOREMA I. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ un aperto limitato e semplicemente connesso con frontiera lipschitziana. Sia $u \in W_2^1(\Omega)$ una funzione armonica.*

(*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

Allora esiste un'applicazione lineare $v = T_1 u$ tale che $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ sia la funzione coniugata delle u e che

$$(5) \quad \|v\|_1 \leq N_1 \|u\|_1$$

dove N_1 è una costante dipendente solo da Ω .

Questo Teorema segue immediatamente dalla disuguaglianza di Poincaré

$$(6) \quad \|v\|_0^2 \leq (N_1^2 - 1) \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_0^2 + \left(\int_{\Omega} v \, dx \, dy \right)^2 \right).$$

Nel successivo Teorema 2 si tratta il caso della funzione u meno regolare « vicino alla frontiera ». Si suppone che u appartenga solo a $L_2(\Omega)$, ma non-dimeno assuma valori su $\partial\Omega$ nel senso che u sia la soluzione generalizzata del problema al contorno.

$$(7) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega$$

dove φ appartiene a $L_2(\partial\Omega)$.

Diciamo che u è la soluzione di (7) (vedi [1] o anche [2]) se qualsiasi successione u_n di funzioni armoniche di $W_2^{(1)}(\Omega)$ le cui tracce tendono verso φ (rispetto alla norma

$$(8) \quad |\varphi|_0^2 = \int_{\partial\Omega} |\varphi|^2 \, d\mu$$

tendono verso u (rispetto alla norma (4 b)).

Utilizzando la disuguaglianza di Hellinger-Toeplitz

$$(9) \quad \|u_n\|_0 \leq C |u_n|_0$$

e le proprietà ben note delle funzioni armoniche otteniamo che in tal caso le funzioni u_n insieme con tutte le derivate, tendono verso u uniformemente in ogni compatto di Ω ; perciò u risulta armonica.

TEOREMA 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}_2$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{0,1}$ e semplicemente connesso. Sia $g \in L_2(\partial\Omega)$ e sia $u \in L_2(\Omega)$, la soluzione di (7) (con g invece di φ).

Allora esiste un'applicazione lineare $h = T_2 g$ tale che $h \in L_2(\partial\Omega)$ e la funzione v soluzione di (7) con $\varphi = h$ sia la funzione coniugata delle u . La funzione h soddisfa la disuguaglianza

$$(10) \quad |h|_0 \leq N_2 |g|_0$$

dove N_2 dipende solo da Ω .

Dimostrazione. In [3] è stato dimostrato che le tracce dei polinomi armonici costituiscono un sottoinsieme denso nello spazio $L_2(\partial\Omega)$. Basta mostrare quindi il Teorema 2 per i polinomi ed estendere l'applicazione T_2 per continuità su tutto $L_2(\partial\Omega)$; la convergenza, essendo localmente continua, mantiene le condizioni (2).

Sia allora u un polinomio armonico e sia v il polinomio armonico coniugato delle u tale che

$$(11) \quad \int_{\partial\Omega} v \, d\mu = 0.$$

Sia $z_0 \in \partial\Omega$ un punto fisso. Definiamo per

$$(12) \quad G(z) = \int_{\Gamma(z)} v \, d\mu$$

dove $\Gamma(z)$ è l'arco su $\partial\Omega$ che congiunge il punto z_0 con il punto z (nella direzione positiva). La condizione (11) insieme col fatto che $\Omega \in \mathfrak{N}^{0,1}$ è semplicemente connesso assicura che questa funzione sia determinata univocamente per ogni $z \in \partial\Omega$. Di più, otteniamo facilmente $G \in W_2^{(1)}(\partial\Omega)$. Qui $W_2^{(1)}(\partial\Omega)$ è lo spazio delle funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $G_i(\xi_i) = G(\xi_i, a_i(\xi_i)) \in W_2^{(1)}(-\alpha, \alpha)$ per ogni sistema di assi descritto nella definizione di $\mathfrak{N}^{0,1}$, con la norma

$$(13) \quad \|G\|^2 = \sum_i \|G_i\|_{1,(-\alpha,\alpha)}^2.$$

Ponendo (con opportuna scelta di $\varepsilon = \pm 1$)

$$(14) \quad \frac{dG}{dt}(\xi_i, a_i(\xi_i)) = \varepsilon \frac{dG_i}{d\xi_i}(\xi_i) \{1 + [a'_i(\xi_i)]^2\}^{-1/2}$$

si vede immediatamente che la norma (13) è equivalente a

$$(15) \quad |G|_1^2 = |G|_0^2 + \left| \frac{dG}{dt} \right|_0^2$$

e che per ogni funzione $f \in C^1(\bar{\Omega})$ vale quasi ovunque (nel senso della misura superficiale μ)

$$(16) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = t_x \frac{\partial f}{\partial x} + t_y \frac{\partial f}{\partial y}$$

dove $\frac{\partial f}{\partial t}$ è la derivata tangenziale ($t = (t_x, t_y)$ è il vettore tangente).

Per G otteniamo le condizioni:

$$(17 a) \quad \frac{dG}{dt} = v$$

$$(17 b) \quad |G|_1 \leq C |v|_0.$$

Sia $U \in W_2^{(1)}(\Omega)$ la funzione armonica tale che $U = G$ su $\partial\Omega$. Dal Teorema 1.1 di [1], Capitolo 5 (vedi anche [2]) segue immediatamente la esistenza di una derivata normale (in senso debole) $\frac{\partial U}{\partial \nu} \in L_2(\partial\Omega)$ tale che

$$(18) \quad \left| \frac{\partial U}{\partial \nu} \right|_0 \leq C_1 |U|_1 \leq N_2 |v|_0$$

$$(19) \quad \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial U}{\partial \nu} \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dv} U \, d\mu.$$

Dalla (2) segue:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Di qui e da (17 a) viene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} G \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} G \, d\mu = - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial G}{\partial t} \, d\mu = - |v|_0^2$$

perché

$$vG \in W_2^{(1)}(\partial\Omega) \quad , \quad 0 = \int_{\partial\Omega} \frac{d(vG)}{dt} \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{dv}{dt} G + v \frac{dG}{dt} \right) d\mu.$$

Utilizzando allora la formula di Green (19), otteniamo finalmente

$$|v|_0^2 = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial U}{\partial v} \, d\mu \leq N_2 |v|_0 |u|_0$$

cioè la disegualianza (10).

Nel caso che la funzione u appartenga a $L_2(\Omega)$, I. Babuška ha mostrato un Teorema simile per Ω più regolare. Servendosi di un risultato di Kellogg si può dimostrare lo stesso Teorema sotto le condizioni più deboli:

TEOREMA 3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}_2$, $\Omega \in \mathfrak{N}^{1,\rho}$ ($0 < \rho < 1$) semplicemente connesso. Sia $u \in L_2(\Omega)$ una funzione armonica. Allora esiste l'applicazione lineare T_3 tale che $v = T_3 u \in L_2(\Omega)$ è una funzione coniugata delle v tale che $v(x_0, y_0) = 0$, dove $(x_0, y_0) \in \Omega$ è un punto fisso. Quest'applicazione soddisfa*

$$(20) \quad \|v\|_0 \leq N_3 \|u\|_0$$

dove N_3 dipende solo da Ω e (x_0, y_0) .

La dimostrazione di questo Teorema si trova nel lavoro [4] di I. Babuška (Teorema 4 di quell'articolo; vedi anche [5]) per Ω un po' più regolare. La dimostrazione ivi data si basa sul seguente risultato (Teorema di Smirnof): Sia ω un'applicazione conforme del cerchio unitario su un Ω con la frontiera abbastanza regolare. Allora la derivata (complessa) di $\omega(z)$ goda della proprietà $0 < \varepsilon \leq |\omega'(z)| \leq k < \infty$ (vedi Smirnof [6]). Il Teorema di Kellogg invece (G. M. Goluzin [7], Teorema 6 del § 2, capitolo X) permette di mostrare il Teorema 3 seguendo letteralmente la dimostrazione di Babuška.

Per quanto riguarda il caso di Ω meno regolare anche Babuška ha mostrato ([5]) soltanto l'esistenza dell'applicazione $T_{4,\varepsilon}$ lineare da $L_2(\Omega)$ in $L_{2-\varepsilon}(\Omega)$ con $0 < \varepsilon < 1$ (per le regioni Ω la cui frontiera consiste di un numero finito di archi abbastanza regolari, con i punti angolosi).

Gli esempi seguenti dimostrano che i Teoremi precedenti non restano veri se Ω non appartiene a $\mathfrak{N}^{0,1}$:

Usando le coordinate polari

$$(21) \quad x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi$$

poniamo $\Omega = \{\rho, \varphi \mid 0 < \rho < 1, -\rho^\omega < \varphi < \rho^\omega\}$, dove ω è la costante positiva. Si vede facilmente che la funzione $v = \rho^{-\alpha} \cos \alpha\varphi$, essendo la parte immaginaria della funzione complessa $iz^{-\alpha}$, è la funzione coniugata della funzione $u = \rho^{-\alpha} \sin \alpha\varphi$. Si vede anche che $\Omega \in \mathfrak{N}^{0, \frac{1}{\omega+1}}$ (cioè Ω ha la frontiera $\frac{1}{\omega+1}$ — hölderiana). Otteniamo facilmente

$$\begin{aligned}
 \|u\|_0^2 &= \int_0^1 \rho^{-(2\alpha-1-3\omega)} \frac{2\alpha\rho^\omega - \sin 2\alpha\rho^\omega}{2\alpha\rho^3} \alpha\rho \\
 (22) \quad \|v\|_0^2 &= \int_0^1 \rho^{-(2\alpha-1\omega)} \left[1 + \frac{\sin 2\alpha\rho^\omega}{2\alpha\rho^\omega} \right] d\rho \\
 |u|_0^2 &= 2 \int_0^1 \rho^{-2(\alpha-\omega)} \frac{\sin^2 \alpha\rho^\omega}{\rho^{2\omega}} \sqrt{1 + \omega^2 \rho^2} d\rho + \int_{-1}^1 \sin^2 \alpha\varphi d\varphi \\
 |v|_0^2 &= 2 \int_0^1 \rho^{-2\alpha} \cos^2 \alpha\rho^\omega \sqrt{1 + \omega^2 \rho^{2\omega}} d\rho + \int_{-1}^1 \cos^2 \alpha\varphi d\varphi.
 \end{aligned}$$

Scegliendo la costante α, ω otteniamo vari esempi:

$$(23) \quad \omega > 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} : u \in L_2(\Omega), \quad u \in L_2(\partial\Omega), \quad v \in L_2(\Omega), \quad v \notin L_2(\partial\Omega)$$

$$(24) \quad \omega > 1, \quad \alpha = 1 + \frac{\omega}{2} : u \in L_2(\Omega), \quad u \in L_2(\partial\Omega), \quad v \notin L_2(\partial\Omega), \quad v \notin L_2(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \omega > 0, \quad \alpha = \min\left(1 + \frac{\omega}{2}, \frac{1}{2} + \omega\right) : u \in L_2(\Omega), \quad u \notin L_2(\partial\Omega), \\
 v \notin L_2(\Omega), \quad v \in L_2(\partial\Omega).
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Prague 1967.
- [2] J. NEČAS, *Sulle soluzioni delle equazioni di tipo ellittico* (in russo), «Czech. Mat. Journ.», 10, 283-298 (1960).
- [3] P. DOKTOR, *La soluzione approssimativa del problema di Dirichlet* (in russo), «Čas. Pěst. Mat.», 89, 390-401 (1964).
- [4] I. BABUŠKA, *Una osservazione su una soluzione del problema biarmonico* (in ceco), «Čas. Pěst. Mat.», 79, 41-63 (1964).
- [5] I. BABUŠKA, *Su una proprietà delle funzioni armoniche* (in russo), «Czech. Mat. Journ.», 5, 220-233 (1955).
- [6] V. SMIRNOFF, *Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildung*, «Mathem. Ann.», BD 107 (1933).
- [7] G. M. GOLUZIN, *Teoria geometrica delle funzioni di variabile complessa* (in russo), Mosca 1966.