Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

M. Giovanna Platone Garroni

# Teoremi di confronto "forte" per operatori differenziali ellittici del secondo ordine, non necessariamente autoaggiunti, a coefficienti discontinui. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **52** (1972), n.5, p. 611–616.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_611_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

**Matematica.** — *Teoremi di confronto «forte» per operatori differenziali ellittici del secondo ordine, non necessariamente autoaggiunti, a coefficienti discontinui* (*). Nota I di M. GIOVANNA PLATONE GARRONI, presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Comparison theorems of strong type for solutions of not necessarily self-adjoint elliptic equations and inequalities are given making use of a generalization of Picone's identity.

Teoremi di confronto del tipo di Sturm che generalizzano quelli classici, per soluzioni di equazioni differenziali ellittiche del secondo ordine non necessariamente autoaggiunte, sono stati ottenuti prima da M. H. Protter [11] e in seguito da C. A. Swanson [13], [14], [15] anche per soprasoluzioni e in aperti illimitati. Questi risultati stabiliscono che, se una certa equazione o disequazione è soddisfatta in un aperto $\Omega$ da una funzione $u$ che si annulla sulla frontiera $\partial\Omega$, allora ogni altra soluzione $v$ della stessa equazione o disequazione o di un altra equazione o disequazione opportunamente correlata alla precedente si annulla in $\bar{\Omega}$. In [9] e [10] tali risultati sono stati estesi a operatori differenziali uniformemente ellittici a coefficienti discontinui di tipo non necessariamente autoaggiunto, intendendo le soluzioni e le soprasoluzioni in senso generalizzato: in [9] in aperti limitati, in [10] in aperti illimitati e senza alcuna ipotesi di regolarità sulla frontiera.

Teoremi di confronto «forte», che consistono nel dimostrare che la soluzione $v$ si annulla all'interno di $\Omega$, sono stati ottenuti da K. Kreith in [4], [5] e [6]. In [4] per equazioni autoaggiunte con ipotesi di regolarità per i coefficienti e per l'aperto $\Omega$ tali che la tecnica variazionale di Courant possa essere applicata; in [5] per equazioni non autoaggiunte sfruttando il principio di massimo di Hopf, con l'ipotesi che la frontiera $\partial\Omega$ abbia curvatura limitata; in [6] con considerazioni di natura spettrale nell'ipotesi che possa essere costruita la funzione di Green per gli operatori in questione.

Altri teoremi di confronto «forte» sono stati inoltre ottenuti in [2] per equazioni autoaggiunte, sempre sfruttando il principio di Hopf con ipotesi di regolarità sui coefficienti e sulla frontiera.

Recentemente Allegretto [1] ha ottenuto teoremi di confronto «forte» per soluzioni di equazioni e disequazioni ellittico-paraboliche a coefficienti misurabili e essenzialmente limitati, impostando il problema, come in [9] e in [10], per soluzioni generalizzate e cioè per soluzioni in spazi di Sobolev $H^1(\Omega)$. Egli ottiene tali risultati generalizzando le identità di C. A. Swanson. Nei casi «limite» (come per esempio nel caso «limite» autoaggiunto) ottiene relazioni tra le soluzioni $u$ e $v$ nell'ipotesi che esse appartengano a $H^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca di Analisi funzionale del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

In questo lavoro ci proponiamo di ottenere teoremi di confronto « forte » per soluzioni in senso generalizzato di equazioni o disequazioni differenziali uniformemente ellittiche non necessariamente autoaggiunte a coefficienti discontinui utilizzando una generalizzazione della identità di Picone. Nel caso autoaggiunto (vedi teoremi 2 e 2′ e lemmi 1.2, 2.3) i risultati generalizzano quelli ottenuti in [4] e [2] e sono analoghi a quelli di [1] con l'ipotesi che le soluzioni appartengano a $H^1(\Omega)$ e non a $H^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

Da notare che i risultati sono ottenuti senza alcuna ipotesi di regolarità sulla frontiera di $\Omega$.

Questo lavoro è diviso in due parti. Nella prima parte (costituita da questa Nota I) si enunciano e si illustrano i teoremi di confronto forte per le soluzioni. Nella seconda parte si dimostrano i teoremi enunciati nella prima parte e si danno tra l'altro, sotto forma di lemmi, teoremi di confronto per soprasoluzioni.

## Richiami, notazioni e posizione del problema

Sia $\Omega$ un aperto limitato di uno spazio euclideo $E^n$, $\partial\Omega$ la sua frontiera e $\bar{\Omega}$ la sua chiusura. Molte definizioni e simboli sono gli stessi già introdotti in [9] e in [10].

In particolare consideriamo gli operatori differenziali:

$$\mathrm{M}v \equiv -(\alpha_{ij}\, v_{x_i})_{x_j} + 2\,\beta_i\, v_{x_i} + \gamma v \quad (1)$$

$$\mathrm{L}u \equiv -(a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j} + 2\, b_i\, u_{x_i} + cu\,,$$

dove i coefficienti $\alpha_{ij}$, $a_{ij}$, $\beta_i$, $b_i$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, $\gamma$, $c$ sono funzioni reali definite e misurabili in $\Omega$. Supponiamo

i) $\qquad \alpha_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq \mu\,|\xi|^2, \qquad \mu > 0$

i′) $\qquad a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq \lambda\,|\xi|^2, \qquad \lambda > 0\,,$

per ogni $\xi \in E^n$ e per quasi tutti gli $x$ di $\Omega$;

ii)
$$\begin{aligned} &\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega) & & (i, j = 1, \cdots, n)\\ &\beta_i \in L^n(\Omega) & &\\ &\gamma \in L^{r/2}(\Omega) \qquad r > n & & \end{aligned}$$

ii′)
$$\begin{aligned} &a_{ij} \in L^\infty(\Omega) & & (i, j = 1, \cdots, n)\\ &b_i \in L^n(\Omega) & &\\ &c \in L^{r/2}(\Omega) \qquad r > n & & \end{aligned}$$

iii) $\qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}\,.$

(1) Adotteremo la convenzione secondo la quale un indice ripetuto due volte sottintende una sommazione rispetto ad esso.

Siano $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ i consueti spazi di Sobolev ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ con la topologia definita dalla norma:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega)} .$$

Siano

$$m(v, \varphi) = \int_\Omega (\alpha_{ij} v_{x_i} \varphi_{x_j} + 2\beta_i v_{x_i} \varphi + \gamma v \varphi)\, dx ,$$

$$l(u, \varphi) = \int_\Omega (a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + 2 b_i u_{x_i} \varphi + c u \varphi)\, dx , \qquad u, v, \varphi \in H^1(\Omega)$$

le forme bilineari associate rispettivamente a M e L.

$Q(z)$, $G(x)$, $J[u]$, $V[u]$ abbiano lo stesso significato che in [9]; e precisamente sia $Q(z)$ la forma quadratica in $n+1$ variabili $z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}$, definita da:

$$Q(z) = \alpha_{ij} z_i z_j + 2\beta_i z_i z_{n+1} + G z_{n+1}^2 , \qquad i, j = 1 \cdots n; \tag{1}$$

ove $G(x)$ appartiene a $L^\infty(\Omega)$ ed è tale da rendere $Q(z)$ semidefinita positiva (cfr. [14], [9]); siano

$$J[u] = \int_\Omega [\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2\beta_i u u_{x_i} + (\gamma + G) u^2]\, dx = m(u, u) + \int_\Omega G u^2\, dx$$

$$V[u] = \int_\Omega [(a_{ij} - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + 2u(b_i - \beta_i) u_{x_i} + (c - \gamma - G) u^2]\, dx =$$

$$= l(u, u) - m(u, u) - \int_\Omega G u^2\, dx .$$

$J[u]$ e $V[u]$ sono continue in $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (cfr. [12], pag. 197).

Ricordiamo ora le seguenti note definizioni e proprietà che ci saranno utili nel seguito.

DEFINIZIONE I. – *Sia* B *un sottoinsieme di* $\bar{\Omega}$ *e* $v$ *appartenga a* $H^1(\Omega)$; *si dice che* $v \geq 0\ [v = 0]$ *in* B *nel senso di* $H^1(\Omega)$ *se esiste una successione* $\{v_n\}$ *di funzioni di* $C^1(\bar{\Omega})$ *tale che*:

$$v_n \geq 0\ [v_n = 0] \qquad su \quad B ,$$

$$\lim_{n \to \infty} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} = 0 .$$

PROPOSIZIONE I. – *Sia* $v \in H^1(\Omega)$ *e* $v \geq 0\ [v = 0]$ *in* B *nel senso di* $H^1(\Omega)$; *allora* $v \geq 0\ [v = 0]$ *in* B *q.o.* (cfr. [7], pag. 48 e segg.).

DEFINIZIONE II. – *Una* $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *è detta* M–*soluzione in* $\Omega$ *se si ha*:

$$m(v\,,\varphi) = 0 \quad , \quad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

*Una* $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *è detta* M–*soprasoluzione* [M–*sottosoluzione*] *in* $\Omega$ *se si ha*:

$$m(v\,,\varphi) \geq 0\,[m\,(v\,,\varphi) \leq 0] \quad , \quad \forall\varphi \geq 0 \quad , \quad \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,; \tag{3}$$

invece delle (2) e (3) scriveremo spesso in modo più semplice, rispettivamente,

$$\mathrm{M}v = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{M}v \geq 0\,[\mathrm{M}v \leq 0] \quad \text{in } \Omega\,.$$

Dal noto teorema di De Giorgi sulla hölderianità delle soluzioni locali di $\mathrm{M}v = 0$ in $\Omega$ (cfr. [3]) segue in particolare:

PROPOSIZIONE II. – *Se* M *verifica le ipotesi* i) *e* ii); *allora ogni* M–*soluzione in* $\Omega$ *è continua in* $\Omega$.

PROPOSIZIONE III. – *Se* M *verifica le ipotesi* i) *e* ii); *allora le* M–*soluzioni non negative in* $\Omega$ *sono positive o identicamente nulle* (cfr. [12], pag. 238).

PROPOSIZIONE IV. – *Se* M *verifica le ipotesi* i) *e* ii) *e* $v$ *è* M–*sottosoluzione* [M–*soprasoluzione*] *allora esiste una costante* $\mathrm{N} > 0$ *tale che*

$$\max_{\Omega} v \leq \max\,(\max_{\partial\Omega} v\,, 0) + \mathrm{N}\,\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

$$[\min_{\Omega} v \geq \min\,(\min_{\partial\Omega} v\,, 0) - \mathrm{N}\,\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}]$$

(cfr. [12] teorema 41, pag. 213 e osservazione 4.3, pag. 216).

Diamo ora una definizione di positività per funzioni di $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

DEFINIZIONE III. – *Diremo che una funzione* $v$, *appartenente a* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *è positiva* [*negativa*] *in un aperto* $\Omega'$ *contenuto in* $\Omega$, *se* $v \geq 0\,[v \leq 0]$ *in* $\Omega'$ *nel senso di* $\mathrm{H}^1(\Omega')$ *e* $1/v \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{A})$ *per ogni aperto* A *tale che* $\bar{\mathrm{A}} \subset \Omega'$.

Ovviamente se $v > 0\,[v < 0]$ in $\Omega$ nel senso della definizione III, per ogni costante $\varepsilon > 0$ si ha che $1/(v+\varepsilon)\,[1/(v-\varepsilon)]$ appartiene a $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$; basta osservare infatti che $v \geq 0\,[v \leq 0]$ in $\Omega$ nel senso di $\mathrm{H}^1(\Omega)$ implica $v \geq 0$ $[v \leq 0]$ q.o. in $\Omega$ (cfr. proposizione I).

Nel seguito tutte le disuguaglianze o uguaglianze tra funzioni di $\mathrm{H}^1(\Omega)$ saranno da intendersi, salvo avviso contrario, nel senso di $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Per semplificare gli enunciati dei teoremi introduciamo i seguenti simboli.

Indichiamo con $\underline{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ *l'insieme delle* M–*sottosoluzioni non negative* (*o delle* M–*soprasoluzioni non positive*) *in* $\Omega$ e cioè poniamo:

$$\underline{\mathrm{S}}\,(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v \geq 0 \quad \text{in } \Omega\,, \quad \mathrm{M}v \leq 0 \quad \text{in } \Omega\} - \{0\}$$

$$(\text{oppure } \underline{\mathrm{S}}\,(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v \leq 0 \quad \text{in } \Omega\,, \quad \mathrm{M}v \geq 0 \quad \text{in } \Omega\} - \{0\})\,;$$

con $\mathrm{S}(\mathrm{M})$ *l'insieme delle* M–*soluzioni non negative* (*o non positive*) *in* $\Omega$:

$$\mathrm{S}\,(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v \geq 0 \quad \text{in } \Omega \text{ e } \mathrm{M}v = 0 \quad \text{in } \Omega\} - \{0\}$$

$$(\text{oppure } \mathrm{S}\,(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v \leq 0 \quad \text{in } \Omega \text{ e } \mathrm{M}v = 0 \quad \text{in } \Omega\} - \{0\})\,;$$

con $\overline{\Sigma}(\mathrm{M})$ *l'insieme delle* M–*soprasoluzioni positive* (*o delle* M–*sottosoluzioni negative*) *in* $\Omega$:

$$\overline{\Sigma}(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v > 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \mathrm{M}v \geq 0 \quad \text{in } \Omega\}$$

$$\left(\text{oppure } \overline{\Sigma}(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v < 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \mathrm{M}v \leq 0 \quad \text{in } \Omega\}\right);$$

con $\Sigma(\mathrm{M})$ *l'insieme delle* M–*soluzioni positive* (*o negative*) *in* $\Omega$:

$$\Sigma(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v > 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad \mathrm{M}v = 0 \quad \text{in } \Omega\}$$

$$\left(\text{oppure } \Sigma(\mathrm{M}) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v < 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \mathrm{M}v = 0 \quad \text{in } \Omega\}\right).$$

OSSERVAZIONE I. – Con i simboli ora introdotti la proposizione III si può enunciare nel modo seguente:

*Se* M *verifica le ipotesi* i) *e* ii), *allora*

$$\mathrm{S}(\mathrm{M}) \equiv \Sigma(\mathrm{M})\,. \tag{4}$$

Sussistono i seguenti teoremi 1, 1′, 2, 2′.

TEOREMA 1. – *Se esiste una* $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *tale che* $\mathrm{J}[u] < 0$; *allora* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \varnothing$.

Il seguente teorema 1′ si ottiene come corollario dal teorema 1; in esso sono tra loro correlati gli operatori L e M dalla relazione integrale $\mathrm{V}[u] > 0$.

TEOREMA 1′. – *Se esiste una* $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *tale che* $l(u\,,u) \leq 0$, $\mathrm{V}[u] > 0$; *allora* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \varnothing$.

OSSERVAZIONE II. – Dire che $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \varnothing$ equivale a dire che ogni eventuale M–soluzione deve cambiare di segno in $\Omega$ (e quindi in virtù della proposizione II deve annullarsi in $\Omega$). Possiamo cioè affermare che *nelle ipotesi dei teoremi* 1, 1′, *se esiste una* $v$ *che sia* M–*soluzione in* $\Omega$, *esistono allora due insiemi aperti non vuoti* $\Omega'$ *e* $\Omega''$ *contenuti in* $\Omega$, *tali che* $v > 0$ *in* $\Omega'$, $v < 0$ *in* $\Omega''$.

I seguenti teoremi 2, 2′ riguardano il caso in cui M è autoaggiunto; in questo caso si ha: $\beta_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $\mathrm{G} = 0$, $\mathrm{J}[u] = m(u\,,u)$, $\mathrm{V}[u] = l(u\,,u) - m(u\,,u)$.

TEOREMA 2. – *Sia* M *autoaggiunto; se esiste una* $u$ *di segno costante* ($u \not\equiv 0$) *appartenente a* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *e tale che* $\mathrm{J}[u] \leq 0$; *allora si hanno i due seguenti casi*:

I) $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \varnothing$; *oppure*

II) $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{tu\,, t \neq 0\}$.

Il seguente teorema 2′ si ottiene come corollario del teorema 2; in esso, analogamente al teorema 1′, sono tra loro correlati gli operatori L e M dalla relazione integrale $\mathrm{V}[u] \geq 0$.

TEOREMA 2′. – *Sia* M *autoaggiunto; se esiste una* $u$ *di segno costante* ($u \not\equiv 0$) *appartenente a* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *e tale che* $l(u\,,u) \leq 0$, $\mathrm{V}[u] \geq 0$; *allora si hanno i due casi seguenti*:

I) $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \varnothing$; *oppure*

II) $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{tu\,, t \neq 0\}$.

OSSERVAZIONE III. – Possiamo allora affermare che *nelle ipotesi dei teoremi* 2 *e* 2′, *se esiste una* $v$ M–*soluzione con* $v \neq tu$, $\forall t$, *allora esistono due aperti non vuoti* $\Omega'$ *e* $\Omega''$ *contenuti in* $\Omega$ *tali che* $v > 0$ *in* $\Omega'$, $v < 0$ *in* $\Omega''$. *Se invece esiste una costante* $k$ *per cui* $v = ku$, *allora tutte le* M–*soluzioni di segno costante sono soluzioni del tipo* $tu$, $t \neq 0$, *cioè sono funzioni di* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Osserviamo inoltre che il teorema 2′ afferma tra l'altro che per tutta la classe di operatori M autoaggiunti verificanti le ipotesi i) e ii) e che siano legati a un operatore fissato L, verificante le ipotesi i′) e ii′), dalla relazione $\mathrm{V}[u] \geq 0$, si mantiene fisso l'insieme delle eventuali soluzioni di segno costante; tale insieme, tenendo conto anche della funzione identicamente nulla, è la retta $\{tu, \forall t\}$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] W. ALLEGRETTO, *A comparison theorem for non linear operators*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », *25* (1), 41–46 (1971).

[2] J. B. DIAZ e J. R. MCLAUGHLIN, *Sturm separation and comparison theorems for ordinary and partial differential equations*, « Atti della Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, *9* (5), 135–194 (1969).

[3] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, « Mem. Accad. Sc. Torino », serie III, 25–43 (1957).

[4] K. KREITH, *A strong comparison theorem for selfadjoint elliptic equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *19*, 989–990 (1968).

[5] K. KREITH, *A remark on a comparison theorem of Swanson*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *20*, 549–550 (1969).

[6] K. KREITH, *Sturmian theorems and positive resolvents*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *159*, 319–327 (1969).

[7] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA e H. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », *17* (1–2), 44–79 (1963).

[8] M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale del secondo ordine*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », *11*, 3–24 (1910).

[9] M. G. PLATONE GARRONI, *Una generalizzazione dell'identità di Picone a operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui*, « Rend. Acc. Lincei », 57 (3–4), 133–138 (1969).

[10] M. G. PLATONE GARRONI, *Teoremi di confronto per soprasoluzioni rispetto a operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui in aperti illimitati*, « Boll. U.M.I. », *3* (3), 362–374 (1970).

[11] M. H. PROTTER, *A comparison theorem for elliptic equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *10*, 296–299 (1959).

[12] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, « Ann. Inst. Fourier », *15*, 189–259 (1965).

[13] C. A. SWANSON, *A comparison theorem for elliptic differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *17*, 611–616 (1966).

[14] C. A. SWANSON, *Comparison theorems for elliptic equations on unbounded domains*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *126*, 278–285 (1967).

[15] C. A. SWANSON, *An identity for elliptic equations with applications*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *134*, 325–333 (1968).