Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Susana Elena Trione

Soluzioni elementari causali dell'operatore di Klein—Gordon iterato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 607–610.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_607_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Soluzioni elementari causali dell'operatore di Klein–Gordon iterato.* Nota di SUSANA ELENA TRIONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The distributions $G_\alpha\{P \pm i0, m, n\}$ (formula (1)) share many properties with the Bessel kernel, of which they are « causal » (« anticausal ») analogues. In particular (Theorem 1), $G_\alpha * G_{-2k} = G_{\alpha-2k}$, $\Lambda\alpha \in \mathbf{C}$, $\Lambda k = 0, 1, 2, \cdots$. The essential tool for the proof of this formula is the multiplication formula (4), namely

$$\{m^2 + Q(y) \mp i0\}^\alpha \{m^2 + Q(y) \mp i0\}^\beta = \{m^2 + Q(y) \mp i0\}^{\alpha+\beta},$$

which is valid for every $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. It follows from Theorem (1) that $G_{2k}\{P \pm i0, m, n\}$, is, for $n \geq 2$, $k = 1, 2, \cdots$, a causal (anticausal) elementary solution of the n–dimensional Klein–Gordon operator, iterated k times (Theorem 2). The particular case $n = 4$, $k = 1$ is important in the quantum theory of fields, since $G_2\{P + i0, m, 4\}$ embodies a useful expression of the causal propagator of Feynman. It may be observed that the elementary solutions $G_{2k}\{P \pm i0, m, n\}$ have the same form for every $n \geq 2$. This does not happen for other elementary solutions, whose form depends essentially on the parity of n.

1. Consideriamo le distribuzioni

$$G_\alpha\{P(x) \pm i0, m, n\} = H_\alpha(m, n)\{\sqrt{P \pm i0}\}^{(\alpha-n)/2} K_{(n-\alpha)/2}\{\sqrt{m^2(P \pm i0)}\}, \tag{1}$$

dove

$$P = P(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2,$$

$$\alpha \in \mathbf{C} \quad , \quad m > 0, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad , \quad n \geq 2$$

e K è la ben nota funzione modificata di Bessel di terza specie (cfr. [1], p. 5, form. (3)). Abbiamo inoltre posto

$$H_\alpha(m, n) = e^{\frac{\pi}{2}i\alpha}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\left\{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^{-1}(m^2)^{\frac{1}{2}\left[\frac{n-\alpha}{2}\right]},$$

$$\{P \pm i0\}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\{P \pm i\varepsilon|x|^2\}^\alpha, \qquad \text{con} \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

La funzione di distribuzione G_α è un analogo « causale » (« anticausale ») del nucleo di Aronszajn–Smith, chiamato anche nucleo di Bessel (cfr. [4], p. 386).

TEOREMA 1. – *Ipotesi* $\alpha \in \mathbf{C}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. *Tesi*

$$(G_\alpha * G_{-2k})^\Lambda = G_\alpha^\Lambda G_{-2k}^\Lambda, \tag{2}$$

$$G_\alpha * G_{-2k} = G_{\alpha-2k}. \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

Col simbolo $*$ denotiamo, come di consueto, la convoluzione; e con Λ denotiamo la trasformata di Fourier: $f(x)^{\Lambda} = \int_{\mathbf{R}_n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)\, dx$ (quando f è una funzione).

Dimostrazione. – L'istrumento essenziale per la dimostrazione è la seguente formula di moltiplicazione, valida per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$:

$$\{m^2 + Q \mp i\,0\}^{\alpha} \{m^2 + Q \mp i\,0\}^{\beta} = \{m^2 + Q \mp i\,0\}^{\alpha+\beta}. \tag{4}$$

Osserviamo che la (4) è tutt'altro che evidente. Infatti, nel primo membro appare il prodotto moltiplicativo di due distribuzioni complicate, come si vede dalla seguente formula (cfr. [5], p. 565) valida per $k = 1, 2, \cdots$:

$$\{m^2 + Q \mp i\,0\}^{-k} = pf\,\{m^2 + Q\}^{-k} \pm \frac{(-1)^{k-1}\, i\pi}{(k-1)!}\, \delta^{[k-1]}(Q).$$

In questa formula abbiamo posto

$$Q = Q(y) \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2.$$

Omettiamo la dimostrazione della (4) che si fa, *mutatis mutandis*, collo stesso metodo usato dal Fisher (cfr. [6]) per provare l'analoga formula relativa alle distribuzioni unidimensionali $(x \pm i\,0)^{\alpha}$.

Ci sarà anche utile nel seguito la seguente formula (cfr. [2], p. 289), valida per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$,

$$[G_{\alpha}\{P \pm i\,0\}]^{\Lambda} = (-1)^{\alpha/2}\{m^2 + Q(y) \mp i\,0\}^{-\alpha/2}. \tag{5}$$

Osserviamo che nel secondo membro della (5) appare una funzione di distribuzione intera di α; da ciò scende che anche $G_{\alpha}\{P \pm i\,0\}$ è una funzione di distribuzione intera di α.

2. Dalla (5) consegue, per $\alpha = -2l$, $l = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\{G_{-2l}[P \pm i\,0]\}^{\Lambda} = (-1)^{l}\{m^2 + Q(y)\}^{l}; \tag{6}$$

e da questa si ricava

$$G_{-2l}\{P \pm i\,0\} = \{\Box - m^2\}^{l}\,\delta, \tag{7}$$

dove, come di consueto, denotiamo con $\Box$ il lorentziano:

$$\Box \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

In particolare, per $l = 0$,

$$G_0\{P \pm i\,0\} = \delta. \tag{8}$$

Osserviamo che $G_{-2l}\{P \pm i\,0\}$ è una distribuzione della classe O'_c. Poichè, d'altra parte, $G_\alpha \in S'$, $\Lambda\alpha \in \mathbf{C}$, un teorema fondamentale di Schwartz (cfr. [3], p. 268, formula (VII, 8; 5)) mostra che la (2) è effettivamente valida. Osserviamo adesso che, *come conseguenza della formula moltiplicativa* (4), si arriva alla

$$\{G_\alpha\}^\Lambda \{G_{-2l}\}^\Lambda = \{G_{\alpha-2l}\}^\Lambda; \tag{9}$$

dalle (2), (9) scende immediatamente la (3), ciò che prova il Teorema (1).

Può vedersi che, più generalmente, la relazione

$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta} \tag{10}$$

è vera per α, β numeri complessi arbitrari. Questo consegue essenzialmente dal Teorema 1 e dal fatto che i due membri della (10) sono funzioni di distribuzione *intere* dei due parametri α, β. Da ciò scende anche la relazione

$$\{G_\alpha * G_\beta\}^\Lambda = \{G_\alpha\}^\Lambda \{G_\beta\}^\Lambda \qquad \Lambda\alpha\,,\,\beta \in \mathbf{C}.$$

3. Se si tiene conto della (7), la (3) può scriversi

$$G_\alpha * G_{-2l} = G_\alpha * \{\square - m^2\}^l\,\delta = \{\square - m^2\}^l\,G_\alpha = G_{\alpha-2l}. \tag{11}$$

Se in (11) si pone $\alpha = 2\,l$, ricaviamo (cfr. la (8)):

$$\{\square - m^2\}^l\,G_{2l} = \delta. \tag{12}$$

Abbiamo dunque dimostrato il

Teorema 2. – *Le distribuzioni* $G_{2k}\{P \pm i\,0\,,m\,,n\}$, $k = 1\,,2\,,\cdots,n \geq 2$, *sono soluzioni elementari (causali, anticausali) dell'operatore n–dimensionale di Klein–Gordon iterato k volte.*

Nel caso particolare $n = 4$, $k = 1$, queste soluzioni si scrivono

$$G_2\{P + i\,0\,,m\,,4\} = -\frac{mi}{4\pi^2}\,\frac{K_1\{\sqrt{m^2(P + i\,0)}\}}{(P + i\,0)^{1/2}}\,, \tag{13}$$

$$G_2\{P - i\,0\,,m\,,4\} = \frac{mi}{4\pi^2}\,\frac{K_1\{\sqrt{m^2(P - i\,0)}\}}{(P - i\,0)^{1/2}}\,. \tag{14}$$

La (13) è un'utile espressione della famosa «funzione magica» o propagatore causale del Feynman (cfr. [7], p. 757, formula (3)). Questo fatto ci ha condotto a battezzare «causali» («anticausali») le distribuzioni $G_\alpha\{P \pm i\,0\}$.

Osserviamo da ultimo che le soluzioni elementari $G_{2k}\{P \pm i\,0\,,m\,,n\}$ hanno tutte la stessa forma, qualunque sia l'intiero $n \geq 2$.

Questo non accade per le altre soluzioni elementari dello stesso operatore, la cui forma dipende essenzialmente dalla parità di n (cfr. [5], p. 580, e [8], p. 403).

Bibliografia

[1] Bateman Manuscript, *Higher transcendental functions*, vol. II. Mc. Graw Hill, New York, 1953.

[2] I. M. Gelfand e G. E. Shilov, *Generalized functions*, vol. I. Academic Press, New York, 1964.

[3] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966.

[4] N. Aronszajn e K. T. Smith, *Theory of Bessel potentials, Part I*, « Ann. Inst. Fourier, Grenoble », *11*, 385–475 (1961).

[5] D. W. Bresters, *On distributions connected with quadratic forms*, « Siam J. Appl. Math. », *16*, 563–581 (1968).

[6] B. Fisher, *The generalized function* $(x + io)^{\lambda}$, « Proc. Camb. Phil. Soc. », *68*, 707–708, (1970).

[7] R. P. Feynman, *The theory of positrons*, « Phys. Rev. », *16*, 749–759 (1949).

[8] J. J. Bowman e J. D. Harris, *Green's distributions and the Cauchy problem for the iterated Klein–Gordon operator*, « J. Mathematical Physics », *3*, 396–404 (1962).