Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'inéquation d'évolution de Navier-Stokes. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.5, p. 591–598.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_5_591_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 maggio 1972

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sur l'inéquation d'évolution de Navier–Stokes.* Nota II di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema 3 enunciato nella Nota I.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Nous démontrons le Théorème 3 par la mèthode de pénalisation.

Soit $J : V \to V^*$ l'application de dualité sur V, telle que

$$\|Ju\|^* = \|u\|,$$

et β l'opérateur de pénalisation

$$\beta u = J(u - P_{\mathbf{K}}\, u)\,, \qquad \forall u \in V$$

où $P_{\mathbf{K}} : V \to V$ est l'opérateur de projection sur **K**

Considérons le problème penalisé

$$(2,1) \qquad \begin{aligned} &\left\langle \frac{du}{dt}(t)\,,\, v\right\rangle + \nu a(u(t)\,,\, v) + b(u(t)\,,\, u(t)\,,\, v) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u(t)\,,\, v\rangle = \langle f(t)\,,\, v\rangle \qquad \forall v \in V, \quad \text{pp. sur } [0\,,\, T] \\ &u(0) = u_0\,. \end{aligned}$$

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

Le problème (2,1), [8] pag. 396, a une solution $u_\varepsilon(t)$, telle que

$$(2,2) \qquad u_\varepsilon(t) \in \mathfrak{L}^2(0,T;V) \cap C(0,T;H)$$

$$\frac{du_\varepsilon}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^2(0,T;V^*)$$

Déterminons, maintenant, des éstimations sur $u_\varepsilon(t)$.

De (2,1) on a

$$(2,3) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t)|^2 \leq \langle f(t), u_\varepsilon(t)\rangle - \nu \|u_\varepsilon(t)\|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle$$

étant connu que $b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) = 0$.

De (2,3) suive

$$(2,4) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t)|^2 \leq (\|f(t)\|^* - \nu\|u_\varepsilon(t)\|)\|u_\varepsilon(t)\|.$$

De (2,4) en intégrant et en utilisant le Lemme de Gronwall, [2] pag. 135, on a

$$(2,5) \qquad |u_\varepsilon(t)| \leq c \qquad \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq c.$$

Donc de (2,3) on a

$$(2,6) \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\rangle dt \leq c_1$$

où c, c_1 sont des constantes qui ne dependent pas de ε.

De (2,6), par le même procédé de [3], on a

$$(2,7) \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\|\beta u_\varepsilon(t)\|^*)^2 dt \leq c_1.$$

Démontrons maintenant qu'on peut extraire de $\{u_\varepsilon(t)\}$ une sous-suite de fonctions equicontinues dans H sur $[\bar t, T]$, $\forall \bar t > 0$.

La méthode utilisée pour démontrer cette thèse est semblable à celle utilisée par l'Auteur dans [5], [6].

Soit $\bar t \in [0, T]$ avec $u_\varepsilon(\bar t) \in V$, $\frac{1}{\varepsilon}\|\beta u_\varepsilon(\bar t)\| \leq Q$; posons $v = u_\varepsilon(\bar t)$; on *a*

$$(2,8) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar t)|^2 \leq \langle f(t), u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar t)\rangle + \nu a(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(\bar t)) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(\bar t)) + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar t)\rangle \leq$$

$$\leq \|f(t)\|^* \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar t)\| + \nu\|u_\varepsilon(t)\|\,\|u_\varepsilon(\bar t)\| + c_2\|u_\varepsilon(t)\|^2\|u_\varepsilon(\bar t)\| + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(\bar t), u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar t)\rangle.$$

Observons, maintenant, que, [8] pag. 370,

$$\langle \beta u_\varepsilon(\bar{t}) , \mathrm{P_K}\, u_\varepsilon(t) - \mathrm{P_K}\, u_\varepsilon(\bar{t})\rangle \leq 0$$

De (2,8) on a

$$\begin{aligned}
(2,9) \qquad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar{t})|^2 \leq \|f(t)\|^* \,\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar{t})\| + \\
& + \nu\,\|u_\varepsilon(t)\|\,\|u_\varepsilon(\bar{t})\|^* + c_2\,\|u_\varepsilon(t)\|^2\,\|u_\varepsilon(\bar{t})\|^2 + \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon(\bar{t}) , (u_\varepsilon(t) - \mathrm{P_K}\, u_\varepsilon(t)) - (u_\varepsilon(\bar{t}) - \mathrm{P_K}\, u_\varepsilon(\bar{t}))\rangle \leq \\
& \leq \|f(t)\|^*\,\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\bar{t})\| + \nu\,\|u_\varepsilon(t)\|\,\|u_\varepsilon(\bar{t})\| + \\
& + c_2\,\|u_\varepsilon(t)\|^2\,\|u_\varepsilon(\bar{t})\| + \frac{1}{\varepsilon}(\|\beta u_\varepsilon(\bar{t})\|^*)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|\beta u_\varepsilon(\bar{t})\|^*\,\|\beta u_\varepsilon(t)\|^* .
\end{aligned}$$

Fixons σ positif arbitraire; en intégrant (2,9) on a qu'il y a δ_0, tel que pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$

$$|u_\varepsilon(\bar{t} + \delta) - u_\varepsilon(\bar{t})|^2 \leq \sigma .$$

Observons que δ_0 depende de $\|u_\varepsilon(\bar{t})\|$ et Q.

On a

$$\begin{aligned}
(2,10) \quad & b(u_\varepsilon(t+\delta) , u_\varepsilon(t+\delta) , v) - b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t) , v) = \\
& = b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) , v) + b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) , v) - \\
& - b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) , v) + b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , v) = \\
& = b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) , v) + b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , v) = \\
& = b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , v) + \\
& + b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t) , v) + b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , v) .
\end{aligned}$$

Rappellons, [8] pag. 71 (6,24), que:

$$b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) = 0$$

$$b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) = 0 .$$

Posons dans (2,10) $v = u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)$, on a

$$\begin{aligned}
(2,11) \qquad & b(u_\varepsilon(t+\delta) , u_\varepsilon(t+\delta) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) - \\
& - b(u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) = \\
& = b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)) .
\end{aligned}$$

Rappellons, [8] pag. 67, qu'on a

$$\begin{aligned}
(2,12) \qquad & |b(u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t) , u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t))| \leq \\
& \leq \|u_\varepsilon(t)\|\,|u_\varepsilon(t+\delta) - u_\varepsilon(t)|^2 \leq 4\,c^2\,\|u_\varepsilon(t)\| .
\end{aligned}$$

De (2,1) on a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2 \leq \|f(t+\delta)-f(t)\|^* \cdot \tag{2,13}$$

$$\cdot\|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)\|-\nu\,\|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)\|^2+4\,c^2\,\|u_\varepsilon(t)\|^2.$$

En intégrant (2,13), on a qu'il y a un interval $[\bar{t}\,,\bar{t}+\rho]$, $\rho>0$, dans lequel

$$|u_\varepsilon(t+\delta)-u_\varepsilon(t)|^2\leq 2\,\sigma$$

$0\leq\delta\leq\delta_0$.

Observons que ρ depende de c et σ.

De (2,5) (2,7) il y a une suite $\{t_n\}$ dense dans $[0\,,T]$, telle que

$$\max\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(t_n)\|\leq Q_n$$

$$\max\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\|\beta u_\varepsilon(t_n)\|^*)^2\leq Q_n\,.$$

On peut, alors, découper l'interval $[\bar{t}\,,T]$ par des points $s_i\in\{t_n\}$ $i=0\,,1,\cdots,m$ dans des intervals partiels de mesure inférieure a ρ et supposer, sans perdre de generalité, $\|u_\varepsilon(s_i)\|\leq Q$ $\frac{1}{\varepsilon}(\|\beta u_\varepsilon(s_i)\|^*)^2\leq Q$ $i=0\,,1\,,\cdots,m$.

Pour le procédé precédent, on peut alors conclure que $\{u_\varepsilon(t)\}$ est composée de fonctions equicontinues.

De (2,5) et du Lemme 1 de [3], on a, au moins d'extractions de sous–suites

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(t)=u(t)\qquad\text{dans}\quad C(\bar{t}\,,T\,;H) \tag{2,14}$$

et, encore de (2,5),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\,u_\varepsilon(t)=u(t)\qquad\text{dans}\quad \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V)\,. \tag{2,15}$$

On a aussi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\beta u_\varepsilon(t)=0\qquad\text{dans}\quad \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V^*)\,. \tag{2,16}$$

De (2,16) on déduit $\beta u(t)=0$, donc $u(t)\in\mathbf{K}$ p.p. dans $[0\,,T]$.

Soit maintenant $v(t)\in\mathbf{K}$ p.p. dans $[0\,,T]$, $v(t)\in\mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V)$ avec $\frac{dv}{dt}(t)\in\mathfrak{L}^2(0\,,T\,;H)$; on a

$$\left\langle\frac{du_\varepsilon}{dt}(t)\,,v(t)-u_\varepsilon(t)\right\rangle+\nu a(u_\varepsilon(t)\,,v(t)-u_\varepsilon(t))+ \tag{2,17}$$

$$+\,b(u_\varepsilon(t)\,,u_\varepsilon(t)\,,v(t)-u_\varepsilon(t))+\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta u_\varepsilon(t)\,,v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle=$$

$$=\langle f(t)\,,v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle\,.$$

On a $\langle \beta u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle \le \langle \beta v(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle = 0$, donc pour $t_1, t_2, \in [0, T]$ on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \Big\rangle + \nu a(u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)) +$$

$$+ b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)) - \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle \Big\} dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \{ | v(t_2) - u_\varepsilon(t_2)| - |v(t_1) - u_\varepsilon(t_1)|^2 \}.$$

De (2,14) on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \Big\rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \Big\rangle dt \tag{2,18}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | v(t_i) - u_\varepsilon(t_i)|^2 = | v(t_i) - u(t_i)|^2 \qquad i = 1, 2. \tag{2,19}$$

De (2,15) on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t)\rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle dt \tag{2,20}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_1}^{t_2} a(u_\varepsilon(t), v(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} a(u(t), v(t)) dt \tag{2,21}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(u(t), u(t)) dt \le \min\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_1}^{t_2} a(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt. \tag{2,22}$$

Examinons, enfin, le terme

$$\int_{t_1}^{t_2} b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v(t) - u_\varepsilon(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v(t)) dt = \tag{2,23}$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} b(u_\varepsilon(t), v(t), u_\varepsilon(t)) dt.$$

En rappellant la formulation esplicite de $b(u, v, w)$, observons qu'on peut supposer

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} u_{\varepsilon 1}(t, x)\, u_{\varepsilon 2}(t, x) = \chi_{1,2}(t, x) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2([0, T] \times \Omega). \tag{2,24}$$

De (2,14) on a alors

(2,25) $$\chi_{1,2}(t\,,x) = u_1(t\,,x)\,u_2(t\,,x)\,.$$

De (2,23) (2,24) (2,25) on a

(2,26) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} b\,(u_\varepsilon(t)\,,\,u_\varepsilon(t)\,,\,v\,(t) - u_\varepsilon(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} b\,(u_\varepsilon(t)\,,\,u_\varepsilon(t)\,,\,v\,(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{t_1}^{t_2} b\,(u_\varepsilon(t)\,,\,v\,(t)\,,\,u_\varepsilon(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} b\,(u(t)\,,\,v(t)\,,\,u(t))\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} b\,(u(t)\,,\,u(t)\,,\,v(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} b\,(u\,(t)\,,\,u\,(t)\,,\,v\,(t) - u\,(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

De (2,18) (2,19) (2,20) (2,21) (2,22) (2,26) on a

(2,27) $$\int_{t_2}^{t_1}\Big\{\Big\langle\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\,,\,v\,(t) - u\,(t)\Big\rangle + \nu a\,(u\,(t)\,,\,v\,(t) - u\,(t)) +$$

$$+ b\,(u\,(t)\,,\,u\,(t)\,,\,v\,(t) - u\,(t)) - \langle f\,(t)\,,\,v\,(t) - u\,(t)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\,\{|\,v\,(t_2) - u\,(t_2)|^2 - |\,v\,(t_1) - u\,(t_1)|^2\}\,.$$

La partie de la thèse concernante l'existence est ainsi démontrée.

Pour la partie concernante l'unicité on utilise un procédé classique [8]. Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions de (1,3) et posons

$$w\,(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2}$$

$$\theta\,(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}$$

$$\eta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_\eta(t) + \theta_\eta(t) = \theta\,(t)$$

$$\theta_\eta(0) = u_0\,.$$

On a, [8],

(2,28) $$\lim_{\eta\to 0}\,\theta_\eta(t) = \theta\,(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(0, T; V)$ et $C(0, T; H)$

$$\frac{d}{dt}\theta_\eta(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; H)$$

$$\theta_\eta(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p. sur } [0, T]$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\theta_\eta(t), \theta_\eta(t) - \theta(t) \right\rangle \leq 0 .$$

Posons dans l'inéquation (1,3) $v(t) = \theta_\eta(t)$. On a

$$\int_0^t \Big\{ \left\langle \frac{d}{dt}\theta_\eta(\zeta), \theta_\eta(\zeta) - u_1(\zeta) \right\rangle + \nu a(u_1(\zeta), \theta_\eta(\zeta) - u_1(\zeta)) +$$

$$+ b(u_1(s), u_1(s), \theta_\eta(s) - u_1(s)) - \langle f(s), \theta_\eta(s) - u_1(s) \rangle \Big\} ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\theta_\eta(t) - u_1(t)|^2$$

$$\int_0^t \Big\{ \left\langle \frac{d}{dt}\theta_\eta(s), \theta_\eta(s) - u_2(s) \right\rangle + \nu a(u_2(s), \theta_\eta(s) - u_2(s)) +$$

$$+ b(u_2(s), u_2(s), \theta_\eta(s) - u_2(s)) - \langle f(s), \theta_\eta(s) - u_2(s) \rangle \Big\} ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\theta_\eta(t) - u_2(t)|^2 ;$$

dont

$$\int_0^t \Big\{ \left\langle \frac{d}{dt}\theta_\eta(s), \theta_\eta(s) - \theta(s) \right\rangle + \frac{\nu}{2} a(u_1(s), \theta_\eta(s) - u_1(s)) +$$

$$+ \frac{\nu}{2} a(u_2(s), \theta_\eta(s) - u_2(s)) + \frac{1}{2} b(u_1(s), u_1(s), \theta_\eta(s) - u_1(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} b(u_2(s), u_2(s), \theta_\eta(s) - u_2(s)) - \langle f(s), \theta_\eta(s) - \theta(s) \rangle \Big\} ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \{ |\theta_\eta(t) - u_1(t)|^2 + |\theta_\eta(t) - u_2(t)|^2 \} .$$

En passant à la limite pour $\eta \to 0$ on a

$$\int_0^t \{ -\nu a(w(s), w(s)) + b(u_1(s), u_1(s), w(s)) - b(u_2(s), u_2(s), w(s)) \} ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |w(t)|^2 ;$$

dont en suivant la méthode du Théorème 6.4, pag. 71 [8], on a $w(t) = 0$.

La thèse est ainsi demontrée.

Bibliographie

[1] L. Amerio et G. Prouse, *Functional Analysis and almost periodic functions*, Van Nostrand (1971).

[2] Beckenbach E. F, *Inequalities*, Springer 1969.

[3] Biroli M., *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, « Ann. Mat. pura ed app. », ser. VIII, *88*, 51–70 (1971).

[4] Biroli M., *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *48*, 409–411 (1970).

[5] Biroli M., *Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa », *25* (1), 1–24 (1971).

[6] Biroli M., *Ancora sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche – à paraitre*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa ».

[7] Biroli M., *Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques sur un espace de Hilbert – à paraitre*, « Ricerche di Matematica ».

[8] Lions J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier Villars (1969).

[9] Prouse G., *Soluzioni quasi periodiche dell'equazione di Navier–Stokes in 2 dimensioni*, « Rend. Sem. Padova », *33* (1963).