Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Da Prato

Applications accrétives dans des espaces d'operateurs hermitiens

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.4, p. 485–489.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_4_485_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Applications accrétives dans des espaces d'operatéurs hermitiens.* Nota di GIUSEPPE DA PRATO, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Si considerano le applicazioni sullo spazio di Banach degli operatori hermitiani su uno spazio di Hilbert e si caratterizzano quelle accretive.

1. APPLICATIONS ACCRÉTIVES DANS $H(E_n)$

On se donne un espace de Hilbert complexe E_n de dimension finie n (norme $\| \ \|$, produit scalaire $(\ ,\ )$). On note $H(E_n)$ l'espace de Banach réel des applications hermitiennes dans E_n muni de la norme:

$$\|T\| = \operatorname{Sup}\{\|Tx\|, x \in E_n \|x\| \leq 1\}. \tag{1.1}$$

Si $T \in H(E_n)$ on note $\lambda_1(T) \geq \lambda_2(T) \geq \cdots \geq \lambda_n(T)$ les valeurs propres de T, $e_1(T), \cdots, e_n(T)$ une base orthonormale de vecteurs propres corréspondants et on pose $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T)\, P_i(T)$ où $P_i(T) = (\ , e_i(T))\, e_i(T)$. Si f est une application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on pose:

$$\tilde{f}(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i(T))\, P_i(T) \qquad T \in H(E_n).$$

PROPOSITION 1.1. *Soit* $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *alors* $\tilde{f} \in C^1(H(E_n), H(E_n))$ *et l'on a* (1):

$$\tilde{f}'(T)\, S = \sum_{ij=1}^{n} F_{ij}(T)\, P_i(T)\, SP_j(T) \qquad \forall T, S \in H(E_n) \tag{1.2}$$

où $F_{ij}(T) = (f(\lambda_i(T)) - f(\lambda_j(T)))/(\lambda_i(T) - \lambda_j(T))$ *si* $\lambda_i(T) \neq \lambda_j(T)$ *et* $F_{ij}(T) = f'(\lambda_i(T))$ *si* $\lambda_i(T) = \lambda_j(T)$.

Posons:

$$\tilde{H}_+(E_n) = \{T \in H(E_n)\,;\, \lambda_1(T) > \lambda_2(T) > \cdots > \lambda_n(T),\, |\lambda_1(T)| > |\lambda_n(T)|\}$$
$$\tilde{H}_-(E_n) = \{T \in H(E_n)\,;\, \lambda_1(T) > \lambda_2(T) > \cdots > \lambda_n(T),\, |\lambda_1(T)| < |\lambda_n(T)|\}.$$

PROPOSITION 1.2. *L'application* $\tilde{H}_+(E_n) \cup \tilde{H}_-(E_n) \to \mathbf{R}, T \to \|T\|$ *est différentiable et l'on a* (2):

$$\|T\|' \cdot S \begin{cases} = Tr(P_1(T)\, S) & \forall T \in \tilde{H}_+(E_n), \quad S \in H(E_n) \\ = -Tr(P_n(T)\, S) & \forall T \in \tilde{H}_-(E_n), \quad S \in H(E_n). \end{cases} \tag{1.3}$$

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1972.

(1) $C^1(H(E_n), H(E_n))$ est l'ensemble des applications $F : H(E_n) \to H(E_n)$ continuement dérivables au sens de Fréchet; on note $F'(T)$ la dérivée de F au point T.

(2) Il est facile de voir que $\tilde{H}_+(E_n) \cup \tilde{H}_-(E_n)$ est ouvert et dense dans $H(E_n)$. On note $Tr(T)$ la trace de T.

LEMME 1.1. *Soit* $A \in \tilde{H}_+(E_n)$, $B \in H(E_n)$; *alors les inégalités suivantes sont équivalentes*:

i) $\|A + \alpha B\| \geq \|A\| \qquad \forall \alpha \geq 0$;

ii) $Tr(BP_1(A)) \geq 0$.

Démonstrations. i) $\Rightarrow$ ii) Soit $\varphi(\alpha) = \|A + \alpha B\| - \|A\|$, $\alpha \geq 0$; on a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\alpha) \geq 0$ donc $\varphi'(0) = Tr(BP_1(A)) \geq 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Puisque $A \in \tilde{H}_+(E_n)$ il existe $u \in E_n$ tel que $\|u\| = 1$ et $Au = \|A\| u$ donc on a $(Bu, u) = Tr(BP_1(A)) \geq 0$, d'où $\|A\| = (Au, u) \leq \leq (Au, u) + \alpha(Bu, u) \leq \|A + \alpha B\|$.

THÉORÈME 1.1. *Soit* $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

i) $\tilde{f}$ *est accrétive* (3);

ii) $Tr((\tilde{f}(T) - \tilde{f}(S)) P_1(T - S)) \geq 0$ *pour tout* $T, S \in H(E_n)$ *tels que* $T - S \in \tilde{H}_+(E_n)$.

COROLLAIRE 1.1. *Soit* $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

i) $\tilde{f}$ *est accrétive*;

ii) $Tr((\tilde{f}'(T) S) P_1(S)) \geq 0 \qquad \forall T \in H(E_n), \qquad S \in \tilde{H}_+(E_n)$.

Si $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ définissons une fonction $F \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ par:

$$F(x, y) = (f(x) - f(y))/(x - y) \quad \text{si} \quad x \neq y, \qquad F(x, x) = f'(x). \tag{1.4}$$

THÉORÈME 1.2. *Soit* $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

i) $\tilde{f}$ *est accrétive*;

ii) *Pour tout* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ *et pour toute matrice unitaire* (U_{ij}) *dans* $\mathbf{C}^n$ *on a*:

$$\sum_{i,j=1}^{n} F(x_i, x_j) \psi_{ij}^{(h)} U_{j1} \bar{U}_{i1} \geq 0 \qquad h = 1, 2, \cdots, n \tag{1.5}$$

où:

$$\psi_{ij}^{(h)} = \left(\sum_{k=1}^{h} - \sum_{k=h+1}^{n} \right) U_{ik} \bar{U}_{jk} \qquad h = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.6}$$

Démonstrations. Posons:

$$M = Tr((\tilde{f}'(T) S) P_1(S)), \qquad T \in H(E_n), \qquad S \in \tilde{H}_+(E_n) \tag{1.7}$$

(3) Soit X un espace de Banach, $g : D(g) \subset X \to X$ est accrétive si:

$$\|x - y\| \leq \|x - y + \alpha(g(x) - g(y))\| \qquad \forall x, y \in D(g), \qquad \alpha \geq 0.$$

grace au Corollaire 1.1 il suffit de démontrer que la condition $M \geq 0$ est équivalente à (1.5). D'après (1.2) on a:

$$M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(S)\, A_k \tag{1.8}$$

où:

$$A_k = \sum_{ij=1}^{n} F_{ij}(T)\, Tr(P_1(T)\, P_k(S)\, P_j(T)\, P_1(S)) . \tag{1.9}$$

Soit $\Gamma = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) ; \lambda_1 = 1 , \lambda_1 \geq |\lambda_n| , \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$; Γ est un polyèdre de R^n de sommets $R_1, R_2, \cdots, R_n$:

$$R_i = \{\underbrace{1, \cdots, 1}_{n-i+1 \text{ fois}}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{i-1 \text{ fois}}\} \qquad i = 1, \cdots, n .$$

Puisque A_k ne dépend pas des valéurs propres de S on a $M \geq 0$ si et seulement si la forme linéaire $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k$ est non négative sur Γ. F atteint son minimum dans Γ dans un des points $R_1, \cdots, R_n$ donc la condition $M \geq 0$ équivaut à:

$$\sum_{k=1}^{h} A_k \geq \sum_{k=h+1}^{n} A_k \qquad h = 1, 2, \cdots, n . \tag{1.10}$$

Soit maintenant U une matrice unitaire telle que $P_k(S) = UP_k(T)\, U^*$, $k = 1, \cdots, n$, on a alors:

$$A_k = \sum_{ij=1}^{n} F_{ij}(T)\, U_{ik}\, \overline{U}_{jk}\, U_{j1}\, \overline{U}_{i1} \tag{1.11}$$

où $U_{ij} = (Ue_j(T), e_i(T))$. D'après (1.10) suit alors (1.5).

Remarques. a) Si $n = 1$ alors $\tilde{f}$ est accrétive si et seulement si f est non décroissante.

b) Si $n = 2$ $\tilde{f}$ est accrétive si et seulement si on a:

$$(f(x) - f(y))/(x - y) \geq (1/4)\,(\sqrt{f'(x)} - \sqrt{f'(y)})^2 \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}, \quad x \neq y \tag{1.12}$$

donc l'inégalité (1.12) est une condition nécessaire pour que f soit accrétive dans E_n si $n \geq 2$ (cette condition est suffisante seulment si $n = 2$). Il est facile de voir que, d'après (1.12) il existe $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq Mx^4$ pour x assez grand.

c) Il est facile de voir, à l'aide de (1.12), que si $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\tilde{f}$ est accrétive alors f est localment lipschitzienne. Donc on peut, dans le Théorème 1.2, supposer seulment f continue; naturellement F appartient dans ce cas à $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Il serait intéressant de savoir si la condition «f accrétive dans $H(E_n)$» entraîne des propriétés de régularité pour f.

d) Soit $P(E_n)$ le cône des applications linéaires positives sur E_n; alors les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont valables si l'on remplace $H(E_n)$ par $P(E_n)$ et $\mathbf{R}$ par $\overline{\mathbf{R}}_+ = \{x \in R\,;\, x \geq 0\}$.

Exemple. Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, f non décroissante dans $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}_+$) alors $\tilde{f}$ est accrétive sur $H(E_n)$ (résp. $P(E_n)$).

2. Applications accrétives dans H (E)

On se donne un espace de Hilbert complexe E (norme $\|\ \|$, produit scalaire $(\ ,\ )$); on note $H(E)$ l'espace de Banach réel des applications hermitiennes $E \to E$ muni de la norme:

$$(2.1) \qquad \|T\| = \operatorname{Sup}\{\|Tx\|\,,\ \|x\| \leq 1\} \qquad \forall T \in H(E)\,.$$

On note $P(E)$ le cône dans $H(E)$ des applications positives. Si $T \in H(E)$ on note $\{E_\lambda(T)\}$ la famille spéctrale attachée à T et si $f \in L^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ on pose:

$$(2.2) \qquad \tilde{f}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda(T)\,.$$

On note $H_s(E)$ l'espace $H(E)$ muni de la topologie forte. Pour simplifier les démonstrations on supposera E séparable, mais tous les résultats sont valables en général. On note finalement $\{u_k\}$ une base orthonormale de E.

Le Lemme suivant est bien connu:

LEMME 2.1. *Soit* $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *alors si* $T_n \to T$ *dans* $H_s(E)$ *on a* $\tilde{f}(T_n) \to \tilde{f}(T)$ *dans* $H_s(E)$.

Le Théorème suivant ramène l'étude des applications accrétives de $H(E)$ à celui des applications accrétives de $H(E_n)$.

THÉORÈME 2.1. *Soit* $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

i) $\tilde{f}$ *est accrétive dans* $H(E)$ (*resp.* $P(E)$);

ii) $\tilde{f}$ *est accrétive dans* $H(E_n)$ (*resp.* $P(E_n)$) $\forall n \in N$.

DÉMONSTRATION. i) $\Rightarrow$ ii) évident ii) $\Rightarrow$ i). Posons $\varphi_\alpha = (1 + \alpha f)^{-1}$, $\alpha > 0$, on a $\|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)\| \leq \|t - s\|$; en outre pour tout $S \in H(E)$ $T = \tilde{\varphi}_\alpha(S)$ est solution de l'équation $T + \alpha\tilde{f}(T) = S$. On va démontrer l'inégalité:

$$(2.3) \qquad \|T - S\| \leq \|T - S + \alpha(\tilde{f}(T) - \tilde{f}(S))\| \qquad \forall T, S \in H(E)$$

qui équivaut à

$$(2.4) \qquad \|\tilde{\varphi}_\alpha(T) - \tilde{\varphi}_\alpha(S)\| \leq \|T - S\| \qquad \forall T, S \in H(E)\,.$$

Posons $P_k x = \sum_{n=1}^{k} (x, u_k) u_k$, on a évidemment $P_k T P_k \to T$ dans $H_s(E)$, donc, grâce à i) on a:

$$\| \tilde{\varphi}_\alpha(P_k T P_k) - \tilde{\varphi}_\alpha(P_k S P_k) \| \leq \| P_k T P_k - P_k S P_k \| \leq \| T - S \| . \tag{2.5}$$

Si $x \in E$ on a, d'après le Lemme 2.1:

$$\| \tilde{\varphi}_\alpha(T) x - \tilde{\varphi}_\alpha(S) x \| = \lim_{k \to \infty} \| \tilde{\varphi}_\alpha(P_k T P_k) x - \tilde{\varphi}_\alpha(P_k S P_k) x \| \leq \tag{2.6}$$
$$\leq \| T - S \| \, \| x \|$$

et (2.3) est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

F. E. BROWDER, *Nonlinear accretive operators in Banach spaces*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *73*, 470–476 (1967).

G. DA PRATO, *Somme d'applications non linéaires dans des cônes et équations d'évolution dans des éspaces d'opérateurs*, « J. Math. pures et appl. », *49*, 289–348 (1970).

T. KATO, *Nonlinear semi-groups and evolution equations*, « J. Math. Soc. Japan », *19*, 4, 508–520 (1967).

K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1965).