Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tullio Valent

Sulla forma integrale delle condizioni di congruenza per le deformazioni di un sistema continuo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.3, p. 367–374.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_367_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Meccanica. — *Sulla forma integrale delle condizioni di congruenza per le deformazioni di un sistema continuo* (*). Nota di TULLIO VALENT, presentata (**) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We point out in which cases an integral condition on the ε_{rs} (which has, for $n = 3$, an interesting mechanical meaning) can be interpreted as a sufficient condition for the existence of solutions of the set of partial differential equations $1/2\,(u_{r,s} + u_{s,r}) = \varepsilon_{rs}$ $(r, s = 1, \cdots, n)$, where $\varepsilon_{rs} \in L^2_R(A)$, A being a bounded connected open set of R^n.

Furthermore, we show how this condition allows an integral (weak) formulation of the elastic equilibrium problem, when the stress is taken as principal unknown instead of the displacement.

Consideriamo un sistema continuo A e facciamo riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale. Le condizioni cui deve soddisfare una matrice simmetrica (ε_{rs}) di funzioni definite in A, per potersi interpretare come matrice di deformazione relativa ad uno spostamento infinitesimo (condizioni di congruenza), sono notoriamente presentate in forma differenziale: si tratta di un sistema di equazioni alle derivate parziali, ciascuna del second'ordine, nelle ε_{rs}.

È anche noto come – nell'ipotesi che le ε_{rs} ammettano derivate prime e seconde continue in A – queste equazioni differenziali siano equivalenti ad una condizione *di tipo integrale* (avente un interessante significato meccanico) [1].

Viene allora spontaneo di cercare se – e in che senso – tale condizione di tipo integrale possa pensarsi come condizione di congruenza se le ε_{rs} appartengono a classi più ampie di quella delle funzioni due volte differenziabili con continuità in A, anche in considerazione del fatto che la natura del problema analitico in questione non richiede affatto tali proprietà differenziali per le ε_{rs}.

Ciò è quanto ci si propone nella presente Nota; si perviene, per questa via, ad una *condizione di congruenza per le* ε_{rs}, *supposte quest'ultime* (soltanto) *di quadrato sommabile in A*.

Questa condizione si rivela particolarmente utile in una formulazione integrale (debole) del problema dell'equilibrio elastico ove lo stress sia assunto come incognita fondamentale; sia quando sono assegnate le forze su tutto il contorno – come si vedrà in questa Nota – sia in presenza di vincoli superficiali, anche unilaterali – come si renderà evidente in un successivo lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e alla Ingegneria del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

(1) Cfr., ad esempio, B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna 1961, p. 317 e L. FINZI, *Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *20* (1956).

1. Sia A un aperto limitato e connesso di R^n, ∂A la sua frontiera e $\boldsymbol{x} = (x_r)$ il punto generico di A.

Indichiamo con S lo spazio vettoriale su R delle matrici simmetriche di ordine n $\alpha = (\alpha_{rs})$, ove α_{rs} sono funzioni reali di quadrato sommabile (secondo Lebesgue) in A: $\alpha_{rs} \in L^2_R(A)$.

Si riconosce facilmente che, definendo su S il prodotto scalare nel modo seguente:

$$(\alpha, \beta) = \int_A \alpha_{ij}\, \beta_{ij}\, d\boldsymbol{x}\,; \qquad \alpha, \beta \in S \text{ (2)},$$

S è uno spazio di Hilbert (3).

La norma su S resta così definita:

$$\|\alpha\|_S = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_A \alpha_{ij}^2\, d\boldsymbol{x}\right]^{1/2}.$$

Sia $C^1_{R^n}(\bar{A})$ lo spazio vettoriale su R dei vettori a valori in R^n definiti in $\bar{A}$ (chiusura di A) e ivi differenziabili con continuità.

Indichiamo con $\widehat{C^1_{R^n}(\bar{A})}$ il completamento funzionale di $C^1_{R^n}(\bar{A})$ rispetto alla norma definita da

$$(1) \qquad |||\boldsymbol{u}||| = \left[\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}\right\|_2^2\right]^{1/2}; \qquad \boldsymbol{u} = (u_r) \in C^1_{R^n}(\bar{A}) \text{ (4)},$$

ove la norma $\|\cdot\|_2$ è quella consueta di $L^2_R(A)$:

$$\|\varphi\|_2 = \left[\int_A \varphi^2\, d\boldsymbol{x}\right]^{1/2}; \qquad \varphi \in L^2_R(A).$$

(2) È sott'intesa la sommatoria da 1 a n su ogni indice ripetuto.

(3) Verifichiamo che S è completo. Sia $\{\alpha^k\}$ una successione di Cauchy in S: si ha allora

$$\|\alpha^p - \alpha^q\|_S \to 0 \qquad \text{per} \quad p, q \to +\infty,$$

d'onde

$$\int_A (\alpha_{ij}^p - \alpha_{ij}^q)^2\, d\boldsymbol{x} \to 0, \qquad (i, j = 1, \cdots, n), \qquad \text{per} \quad p, q \to +\infty.$$

Pertanto le successioni $\{\alpha_{ij}^q\}$, $(i, j = 1, \cdots, n)$, sono di Cauchy in $L^2_R(A)$ e quindi convergono in $L^2_R(A)$. Se $\alpha_{ij} = \lim_{k\to+\infty} \alpha_{ij}^k$, risulta $\alpha = (\alpha_{ij}) = \lim_{k\to+\infty} \alpha^k$, dato che

$$\|\alpha^k - \alpha\|_S = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_A (\alpha_{ij}^k - \alpha_{ij})^2\, d\boldsymbol{x}\right]^{1/2}.$$

(4) Si intenda $u_{r,s} = \dfrac{\partial u_r}{\partial x_s}$.

Un vettore $\boldsymbol{u} = (u_r)$ appartiene a $\widehat{\overline{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ se e solo se esiste una successione $\{\boldsymbol{v}^k\}$ di vettori di $C^1_{R^n}(\bar{A})$ e un elemento $(w_{rs}) \in S$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} \| v_r^k - u_r \|_2 = 0 ; \qquad (r = 1, \cdots, n),$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| \frac{v^k_{r,s} + v^k_{s,r}}{2} - w_{rs} \right\|_2 = 0 ; \qquad (r, s = 1, \cdots, n).$$

Per ogni $\boldsymbol{u} \in \widehat{\overline{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ è definito quindi, nel senso forte di Friedrichs, l'operatore differenziale Ω tale che

$$\Omega(\boldsymbol{u}) = \left(\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} \right)_{r,s=1,\cdots,n},$$

risultando

$$\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} = w_{rs}.$$

Non è difficile verificare che tutti e soli i vettori $\boldsymbol{u}$ di $\widehat{\overline{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ per cui $\Omega(\boldsymbol{u}) = 0$ sono del tipo

$$\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x},$$

ove $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante e B è una matrice numerica emisimmetrica di ordine n: si tratta dei vettori che, in una Nota precedente [5], ho chiamato del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi. Indichiamo con $\mathfrak{R}$ il loro insieme.

Su A facciamo l'ipotesi che sia tale per cui sussista la maggiorazione seguente:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \| e_i \|_2^2 \leq k \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right\|_2^2 ,$$

con k dipendente solo da A, per ogni $\boldsymbol{u} \in C^1_{R^n}(\bar{A})$, ove $\boldsymbol{e} = (e_r)$ denota la *parte equilibrata* del vettore $\boldsymbol{u}$ [6].

Questa condizione è soddisfatta, ad esempio, se A è *I–regolare* [7].

(5) T. VALENT, *Una decomposizione di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 52, fasc. 2 (1972).

(6) Cfr. loc. cit. in (5).

(7) Cfr. G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Atti dell'Acc. Naz. dei Lincei (Memorie) », ser. VIII, 7, 115 (1964).

Si tenga presente che [ved. loc. cit. in (5)] la (2) può scriversi nella forma

$$\inf_{\boldsymbol{r} \in \mathfrak{R}} \sum_{i=1}^{n} \| u_i + r_i \|_2^2 \leq k \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right\|_2^2 .$$

Consideriamo i sottospazi lineari U e V di S così definiti:

$$\mathrm{U} = \left\{ \left(\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} \right)_{r,s=1,\cdots,n} : \boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}}) \right\}$$

$$\mathrm{V} = \left\{ \left(\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} \right)_{r,s=1,\cdots,n} : \boldsymbol{u} \in \widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}} \right\}.$$

Proviamo che, sussistendo la (2),

I. V *è chiuso in* S; *anzi coincide con la chiusura* $\overline{\mathrm{U}}$ *di* U *in* S:

$$\mathrm{V} = \overline{\mathrm{U}}. \tag{3}$$

Nello spazio quoziente $\widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}}/\mathfrak{R}$ la norma dell'elemento $[\boldsymbol{u}]$ individuato da $\boldsymbol{u} \in \widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}}$ è [8]

$$\inf_{\boldsymbol{r} \in \mathfrak{R}} |||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}||| = \left[\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right\|_2^2 \right]^{1/2}$$

e tale norma, in conseguenza della (2), è equivalente alla norma che a $[\boldsymbol{u}]$ associa

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right\|_2^2 \right]^{1/2}.$$

Pertanto l'applicazione (chiaramente biunivoca) φ di $\widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}}/\mathfrak{R}$ su V definita da

$$\varphi([\boldsymbol{u}]) = \left(\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} \right)_{r,s=1,\cdots,n}$$

è un omeomorfismo.

Dunque W è chiuso in S, dato che $\widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}}/\mathfrak{R}$ è chiuso.

Poiché, inoltre, palesemente risulta $\mathrm{U} \subset \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{U}}$, si conclude che $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{V}$ [9].

2. Prendiamo in considerazione il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} = \varepsilon_{rs}; \qquad r, s = 1, \cdots, n, \tag{4}$$

ove $\varepsilon = (\varepsilon_{rs}) \in \mathrm{S}$, la derivazione parziale potendo essere intesa in senso generalizzato.

(8) Cfr. loc. cit. in (5).

(9) Del resto, per rendersi conto della (3) basterebbe riflettere su come è costruito $\widehat{\overline{\mathrm{C}^1_{\mathrm{R}^n}(\bar{\mathrm{A}})}}$ e tener conto della (2) e del fatto che $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \Omega(\boldsymbol{u}) = 0$.

In base alla (3) possiamo affermare che

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema* (4), *con* $\varepsilon \in S$, *ammetta soluzioni in* $\overline{\widehat{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ *è che* ε *appartenga a* $\overline{U}$, *ossia* – data l'hilbertianità di S – *che risulti*

$$\int_A \varepsilon_{ij}\, \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} = 0 \tag{5}$$

per ogni $\xi = (\xi_{rs}) \in S$ *tale che*

$$\int_A \xi_{ij}\, v_{i,j}\, d\boldsymbol{x} = 0 \tag{6}$$

qualunque sia $\boldsymbol{v} \in C^1_{R^n}(\bar{A})$. Le (5), com'è noto, sono necessarie e sufficienti affinché $\varepsilon \in \overline{U}$.

Osservazione. Se ad A sono applicabili le formule di Gauss–Green, le (6) sono equivalenti – qualora $\xi_{rs} \in C^1_R(\bar{A})$ – al sistema differenziale

$$\begin{cases} \xi_{ij,j} = 0 & \text{in } A \\ \xi_{ij}\, N_j = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases} \tag{6'}$$

essendo $\mathbf{N} = (N_r)$ il versore della normale interna ad A nei punti regolari di ∂A, mentre le soluzioni di quadrato sommabile in A delle (6) possono interpretarsi come soluzioni « deboli » in S delle (6').

Pertanto la Proposizione II può essere enunciata dicendo che: se $\varepsilon = (\varepsilon_{rs}) \in S$, *condizione necessaria e sufficiente affinché le* (4) *ammettano soluzioni in* $\overline{\widehat{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ *è che* ε *sia ortogonale ad ogni soluzione «debole» in* S *delle* (6').

Nei casi $n = 2$ e $n = 3$, A può pensarsi come lo schema geometrico di un sistema continuo, rispettivamente piano e tridimensionale: le condizioni di integrabilità delle (4) sono proprio le condizioni di congruenza, in un riferimento cartesiano ortogonale, della matrice $\varepsilon = (\varepsilon_{rs})$ per deformazioni infinitesime del sistema continuo.

Le (5) *porgono*, perciò, *una condizione necessaria e sufficiente per la congruenza in* $\overline{\widehat{C^1_{R^n}(\bar{A})}}$ *della matrice* $\varepsilon = (\varepsilon_{rs})$, *con* $\varepsilon_{rs} \in L^2_R(A)$.

La forma (5) delle condizioni di integrabilità del sistema (4), se da un punto di vista strettamente analitico può essere di scarso significato, ha invece interesse in elastostatica perché, come sarà messo in evidenza tra poco, le (5) sono equivalenti alla condizione di minimo espressa dal *Teorema di Menabrea* in una conveniente classe di stress.

3. Sia A la configurazione di riferimento, che supponiamo di equilibrio naturale, di un corpo elastico tridimensionale.

L'aperto limitato e connesso A di R^3 sia *regolare* (nel senso che ad esso si possono applicare le formule di Gauss–Green) e per esso sussista la (2):

queste condizioni su A sono largamente verificate nei casi di interesse concreto.

Mostreremo ora come la Proposizione II ci permetta di ottenere una *impostazione completamente integrale del problema dell'equilibrio elastico*, nel caso linearizzato e con forze assegnate sulla frontiera di A, quando si assumano quali *incognite fondamentali le componenti dello stress*.

La convenienza e l'opportunità di considerare queste come incognite dirette, anziché le componenti dello spostamento, sono state illustrate dal prof. G. Grioli [10].

Con riferimento ad una terna cartesiana trirettangola, assumiamo come equazioni traducenti l'equilibrio dello stress $X = (X_{rs})$ con le forze esterne assegnate, le

$$\int_{\bar{A}} X_{ij}\, v_{i,j}\, dx + \int_{A} F_i\, v_i\, dx + \int_{\partial A} f_i\, v_i\, d\sigma = 0 \tag{7}$$

scritte per ogni vettore $\boldsymbol{v} = (v_r) \in C^1_{R^3}(\bar{A})$, ove $\mathbf{F} = (F_r)$ è la densità di forza di massa e $\boldsymbol{f} = (f_r)$ quella della forza superficiale: supponiamo $\mathbf{F}$ e $\boldsymbol{f}$ di quadrato sommabile rispettivamente in A e su ∂A.

Le (7) traducono il principio dei lavori virtuali e possono dedursi *direttamente* dalla prima equazione cardinale della Statica scritta per ogni porzione di A, senza supporre la derivabilità delle X_{rs} e cioè senza passare attraverso l'impostazione differenziale [11]; se, tuttavia, $X_{rs} \in C^1_R(A)$, esse sono equivalenti alle

$$\begin{cases} X_{ij,j} = F_i & \text{in } A \\ X_{ij} N_j = f_i & \text{su } \partial A, \end{cases} \tag{8}$$

ove $\mathbf{N} = (N_r)$ è il versore della normale interna ad A in ogni punto regolare di ∂A.

Fissiamo la nostra attenzione alle soluzioni $X = (X_{rs})$ delle (7) con X_{rs} *di quadrato sommabile in* A, cioè alle soluzioni delle (7) che stanno in S, $(n = 3)$; sia Γ il loro insieme.

Nella classe Γ lo stress reale è quello « congruente », cioè quello che rende integrabili le

$$\frac{u_{r,s} + u_{s,r}}{2} = \varepsilon_{rs}, \tag{9}$$

ove

$$\varepsilon_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial X_{rs}}, \tag{10}$$

$\boldsymbol{u} = (u_r)$ essendo il vettore spostamento e W la forma quadratica nelle X_{rs}, definita positiva, esprimente la densità di energia potenziale elastica.

(10) G. Grioli, *Proprietà di media ed integrazione del problema dell'elastostatica isoterma*, « Annali di Mat. pura ed appl. », ser. IV, *23* (1952).

(11) Cfr. G. Fichera, *Sul concetto di problema « ben posto » per una equazione differenziale*, « Rend. di Mat. e delle sue appl. », ser. V, *19*, Roma 1960, p. 101.

Facciamo l'ipotesi (senz'altro verificata nei casi concreti) che i coefficienti di W siano funzioni misurabili ed essenzialmente limitate in A: in corrispondenza di ogni $X \in S$, le ε_{rs} ad esso associate tramite le (9) risultano perciò di quadrato sommabile in A e di conseguenza alle (9) è applicabile la Proposizione II.

Pertanto uno stress di Γ che soddisfa alle (5), (10) è congruente e dà luogo a spostamenti $\boldsymbol{u}$ che appartengono a $\widehat{\overline{C^1_{R^3}(\bar{A})}}$; viceversa, se uno stress di Γ è congruente e gli spostamenti che da esso si ottengono stanno in $\widehat{\overline{C^1_{R^3}(\bar{A})}}$, esso verifica le (5), (10).

Le (5), (10), associate alle (7), costituiscono una *formulazione integrale del problema elastostatico* che qui stiamo considerando, almeno limitatamente alla classe degli stress con componenti (cartesiane ortogonali) di quadrato sommabile in A e che dànno luogo a spostamenti appartenenti allo spazio $\widehat{\overline{C^1_{R^3}(\bar{A})}}$.

Le (5), (10) sono equivalenti ad un'altra condizione, ancora di tipo integrale sulle X_{rs} e di notevole significato meccanico.

Facciamo vedere, infatti, che

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno stress* X *di* Γ *verifichi le* (5), (10) – *cioè sia congruente e dia luogo a spostamenti appartenenti a* $\widehat{\overline{C^1_{R^3}(\bar{A})}}$ – *è che esso renda minimo, in* Γ, *il funzionale* $\mathcal{F}$, *definito, per ogni* $X \in S$, *dalla*

$$\mathcal{F}(X) = \int_A W(X)\, d\boldsymbol{x} .$$

Fissato uno stress $X \in \Gamma$, ogni stress di Γ è del tipo $X + \xi$, ove $\xi = (\xi_{rs})$ è un elemento di S tale che

$$\int_A \xi_{ij}\, u_{i,j}\, d\boldsymbol{x} = 0 \tag{11}$$

per ogni $\boldsymbol{u} = (u_r) \in C^1_{R^3}(\bar{A})$.

Per una proprietà delle forme quadratiche si ha

$$W(X + \xi) - W(X) = \frac{\partial W}{\partial X_{ij}}(X)\, \xi_{ij} + W(\xi) ,$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{F}(X + \xi) - \mathcal{F}(X) = \int_A \frac{\partial W}{\partial X_{ij}}(X)\, \xi_{ij}\, d\boldsymbol{x} + \int_A W(\xi)\, d\boldsymbol{x} . \tag{12}$$

Se uno stress X è tale che le ε_{rs} ad esso associate tramite le (10) verificano la (5), dalla (12) segue

$$\mathcal{F}(X + \xi) - \mathcal{F}(X) \geq 0$$

per ogni $\xi = (\xi_{rs})$ verificante le (11), cioè per ogni ξ tale che $X + \xi \in \Gamma$, l'uguaglianza a zero avendosi solo per $\xi = 0$: dunque X è un minimo (assoluto) per $\mathfrak{F}$ in Γ.

Se, viceversa, $\mathfrak{F}$ ammette minimo in Γ e $\overline{X}$ è lo stress minimante, in base alla (12) si ha

$$\int_A W(\xi)\, dx - \int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\, \xi_{ij}\, dx \geq 0\,, \tag{13}$$

ove

$$\bar{\varepsilon}_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial X_{rs}}(\overline{X})\,,$$

per ogni $\xi \in S$ soluzione delle (11); l'uguaglianza a zero c'é solo se $\xi = 0$.

Atteso che W è una forma quadratica nelle X_{rs} la (13) implica

$$\int_A \bar{\varepsilon}_{ij}\, \xi_{ij}\, dx = 0$$

per ogni $\xi \in S$ che verifica le (11), cioè $\bar{\varepsilon}$ verifica le condizioni di integrabilità (5).

Questa Proposizione esprime, in sostanza, il Teorema di Menabrea e il fatto che detto Teorema è senz'altro invertibile se la classe degli stress in cui il funzionale $\mathfrak{F}$ ammette minimo è quella delle soluzioni $X = (X_{rs})$ delle (7) con le X_{rs} di quadrato sommabile in A.