Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Vacca

Alcune funzioni potenziali in magneto-idrodinamica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.3, p. 357–366.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_357_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Magnetoidrodinamica. — *Alcune funzioni potenziali in magnetoidrodinamica* (*). Nota di MARIA TERESA VACCA, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider an incompressible viscous indefinite and electrically conductive fluid slowly moving under the action of a uniform magnetic field and body forces distributed with continuity in a fixed region of the medium. We give two procedures for reduction of this problem. In the case where the induced magnetic field is sufficiently small compared with the body forces, we determine solutions of the velocity field, induced magnetic field and pressure field. These solutions are expressed by definite integrals which, having an analogy with the Newtonian volume potentials, are called *hydrodynamic and magnetic potentials*.

1. Consideriamo un fluido incompressibile indefinito elettricamente conduttore e viscoso, in moto lento sotto l'azione di un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$. Assumeremo l'asse z nella direzione di questo campo il cui versore indicheremo con $\boldsymbol{k}$.

Il campo magnetico indotto sia $\mathbf{H} = \mathrm{H}_0 \boldsymbol{h}$.

L'equazione del moto e quella di continuità risultano

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nu\Delta_2 \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = a^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{k} + \mathbf{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità delle particelle fluide, p la pressione, ρ la densità, ν il coefficiente di viscosità cinematica, $a = \mathrm{H}_0 \sqrt{\mu/\rho}$ la velocità delle onde di Alfvén, essendo μ la permeabilità del mezzo; infine $\mathbf{F}$ è la forza di massa, riferita all'unità di massa.

Si hanno poi le seguenti equazioni del campo magnetico indotto

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} - \eta\, \Delta_2 \boldsymbol{h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{4}$$

dove η è il coefficiente di diffusività magnetica.

Osserviamo intanto che se si prende la divergenza di ambo i membri della (1), poiché $\operatorname{rot} \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z} - \operatorname{grad} h_z$ e $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{k}) = -\Delta_2 h_z$, si ha l'equazione

$$\Delta_2 \left(\frac{p}{\rho} + a^2 h_z\right) = \operatorname{div} \mathbf{F}. \tag{5}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1972.

Per trovare degli integrali del sistema di equazioni (1)–(4) poniamo

$$(6) \qquad \boldsymbol{v} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \equiv \Delta_2 \boldsymbol{u} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

Sostituendo nella (1) abbiamo

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\Delta_2 \boldsymbol{u} + \operatorname{grad}\left\{\frac{p}{\rho} + a^2 h_z - \operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta_2 \boldsymbol{u}\right)\right\} = a^2 \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z} + \mathbf{F}.$$

Questa equazione si può soddisfare ponendo

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\,\Delta_2\right)\Delta_2 \boldsymbol{u} = a^2 \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z} + \mathbf{F}$$

$$(9) \qquad \frac{p}{\rho} + a^2 h_z - \operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta_2 \boldsymbol{u}\right) = \frac{p_0}{\rho} \qquad \text{(costante).}$$

Si riconosce subito che applicando il Δ_2 ad ambo i membri della (9), prendendo la divergenza di ambo i membri della (8) e sommando si ottiene la (5). Ciò equivale anche a prendere la divergenza di ambo i membri della (7).

Possiamo ora eliminare dalla (8) il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$ applicando ad ambo i membri di essa l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2$ e ricordando la (3) e la (6). Si ottiene così

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\Delta_2 \boldsymbol{u} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta_2 \boldsymbol{u} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)\mathbf{F}$$

che è un'equazione in cui è incognito il solo vettore $\boldsymbol{u}$.

Dopo ciò se poniamo ancora

$$(11) \qquad \boldsymbol{h} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{w},$$

la (3) diventa

$$(12) \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \eta\Delta_2 \boldsymbol{w} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\right\} = 0$$

che si può soddisfare ponendo

$$(13) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \eta\Delta_2 \boldsymbol{w} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}.$$

Allora, determinato il vettore $\boldsymbol{u}$ mediante la (10) e successivamente il vettore $\boldsymbol{w}$ mediante la (13), la (6) dà la velocità $\boldsymbol{v}$ e la (11) il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$. Infine la (9) fornisce la pressione p.

2. Un altro procedimento, che sotto un certo punto di vista è più semplice del precedente, è il seguente:

poniamo

$$(14) \qquad \boldsymbol{v} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_1 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial z}.$$

Sostituendo nella (1) questa diventa

$$(15)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta_2\right)\Delta_2\,\boldsymbol{u}_1+\operatorname{grad}\left\{\frac{p}{\rho}+a^2 h_z-\operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t}-\nu\Delta_2\,\boldsymbol{u}_1\right)\right\}+$$
$$+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}-\nu\Delta_2\,\boldsymbol{u}_2\right)=a^2\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z}+\mathbf{F}$$

la quale si può soddisfare ponendo

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta_2\right)\Delta_2\,\boldsymbol{u}_1=\mathbf{F}$$

$$(17)\qquad \boldsymbol{h}=\frac{1}{a^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}-\nu\Delta_2\,\boldsymbol{u}_2\right)$$

$$(18)\qquad \frac{p}{\rho}+a^2 h_z-\operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t}-\nu\Delta_2\,\boldsymbol{u}_1\right)=\frac{p_0}{\rho}\,.$$

L'equazione (3) del campo magnetico sostituendo la (17) e la (14) diventa poi

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}-\eta\Delta_2\,\boldsymbol{u}_2\right)\right\}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial z^2}-\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial z}\right)$$

che risulta verificata ponendo

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta_2\right)\boldsymbol{u}_2-a^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial z^2}=-a^2\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial z}\,.$$

In questo caso la (16) definisce il vettore $\boldsymbol{u}_1$. Dalla (19) si ha quindi il vettore $\boldsymbol{u}_2$ e dalla (17) il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$.

Infine la (18), che è analoga alla (9), dà la pressione p.

3. Particolarmente interessante è il caso in cui la forza di Lorentz è trascurabile in confronto della forza di massa $\mathbf{F}$, in modo che il campo magnetico non abbia influenza sensibile sul movimento delle particelle fluide, ma che produca solo un incremento della pressione. In questo caso ponendo come nel n. 1

$$(6')\qquad \boldsymbol{v}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\equiv\Delta_2\,\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\,,$$

si ha l'equazione (7) nella quale si può trascurare il termine $a^2\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z}$ in confronto della forza di massa $\mathbf{F}$. L'equazione (8) si riduce allora alla seguente

$$(20)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta_2\right)\Delta_2\,\boldsymbol{u}=\mathbf{F}.$$

La (9) rimane inalterata e l'equazione (3) del campo magnetico, ponendo ancora

$$(11')\qquad \boldsymbol{h}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{w},$$

porge, analogamente alla (13),

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \eta \Delta_2 \boldsymbol{w} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \cdot \tag{13'}$$

Ne segue che, calcolato il vettore $\boldsymbol{u}$ mediante la (20), la (13') fornisce il vettore $\boldsymbol{w}$, la (11') dà quindi il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$; infine la (9) dà la pressione p.

Per trovare ora un integrale della (20), nell'ipotesi che la forza $\mathbf{F}$ sia distribuita con continuità in un volume S limitato da una superficie chiusa Σ, osserviamo che un integrale dell'equazione omogenea

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_2\right) \Delta_2 \mathrm{U} = 0 \,, \tag{21}$$

dove U può essere una funzione scalare o un vettore, dipendente dalla distanza r di un punto P da un altro punto M variabile nel volume S, e dal tempo t, in base alla teoria del calore è dato da

$$\Delta_2 \mathrm{U} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\mathrm{U}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \,, \tag{22}$$

essendo $\mathcal{F}$ una funzione arbitraria degli argomenti indicati tra parentesi. Dalla (22) si ricava

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \tag{23}$$

il cui secondo membro è una funzione regolare per $r \to 0$. In conformità di questo risultato faremo vedere che un integrale dell'equazione (20), il quale nei punti P interni al volume S verifichi detta equazione, mentre nei punti esterni soddisfi l'equazione omogenea corrispondente, è della forma

$$\boldsymbol{u}(\mathrm{P}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \,, \tag{24}$$

con $\boldsymbol{f}$ vettore da determinare. Per questo poniamo per semplicità $\nabla_\nu = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta_2$ ed osserviamo che possiamo applicare nella (24) l'operatore ∇_ν sotto il segno di integrale poiché ivi la funzione sotto il segno di integrale di volume è regolare per $r \to 0$; si ha così

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \,- \\ - \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \,. \end{aligned} \tag{25}$$

Ora risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\nu t}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial r} \sqrt{\frac{\nu}{t}}\, u$$

e con una integrazione per parti si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial r} e^{-u^2} u \,\mathrm{d}u = \sqrt{\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial r^2} e^{-u^2} \,\mathrm{d}u .$$

Ne segue

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} e^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \nu \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^r \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial r^2} e^{-u^2} \,\mathrm{d}u =$$

$$= \nu \left\{ \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u - \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u - \right.$$

$$\left. - \int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u \right\},$$

dove l'apice in $\boldsymbol{f}'$ indica derivazione rispetto all'argomento $2u\sqrt{\nu t}$. Sostituendo nella (25) si ottiene

$$(25') \qquad \nabla_\nu \boldsymbol{u} = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u \right\},$$

e applicando ad ambo i membri di questa l'operatore Δ_2 di Laplace, quindi il Teorema di Poisson, si ricava

$$(26) \qquad \Delta_2 \nabla_\nu \boldsymbol{u} \equiv \nabla_\nu \Delta_2 \boldsymbol{u} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right) \Delta_2 \boldsymbol{u} = 4\nu\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{P}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u .$$

Confrontando questa equazione con la (20) si deduce il seguente risultato: *Se si determina il vettore* $\boldsymbol{f}$ *mediante l'inversione dell'integrale*

$$(27) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\mathrm{P}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{4\nu\sqrt{\pi}} \mathbf{F}(\mathrm{P}, t),$$

il vettore $\boldsymbol{u}(\mathrm{P}, t)$ *definito dalla* (24), *nei punti interni al volume* S *verifica l'equazione* (20), *mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente*. Questo vettore è dunque rappresentato da un integrale di volume che per analogia ai potenziali newtoniani di volume si può chiamare *potenziale idrodinamico*.

Dalla (24) si ricava ora

$$\Delta_2 \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \tag{28}$$

$$\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \left\{ -\frac{1}{r^2} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\} \times \mathrm{grad}\, r \cdot dS .$$

Ma mediante una integrazione per parti si ha

$$\int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} e^{-u^2}\, du = r \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} e^{-u^2}\, du - \int_0^r r\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} e^{-u^2}\, du ,$$

ne segue

$$\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r^2} \left\{ \int_0^r r\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\} \times \mathrm{grad}\, r$$

e da questa si deduce

$$\mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_0^r r\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\} \times \tag{29}$$

$$\times\, \mathrm{grad}\, r \cdot \mathrm{grad}\, r\, dS -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{d\, \mathrm{grad}\, 1/r}{dP} \int_0^r r\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \cdot dS .$$

Ricordando che si è posto $\boldsymbol{v} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \equiv \Delta_2 \boldsymbol{u} - \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}$, si ha per la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide l'espressione

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du - \tag{30}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \times \mathrm{grad}\, r \cdot \mathrm{grad}\, r \cdot dS +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{d\, \mathrm{grad}\, 1/r}{dP} \int_0^r r\, dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M, r + 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \cdot dS ,$$

dove, dette x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane del punto P ed f_i ($i = 1, 2, 3$) le componenti del vettore f, è

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{grad}\,1/r}{\mathrm{dP}} \int_0^r r\,\mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\,\mathrm{grad}\,1/r}{\partial x_i} \int_0^r r\,\mathrm{d}r \int_{-\infty}^{+\infty} f_i\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Consideriamo ora il vettore $\boldsymbol{w}$ definito dall'integrale

$$\boldsymbol{w}(\mathrm{P}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{31}$$

con $\boldsymbol{g}$ vettore per il momento arbitrario e facciamo vedere che nei punti interni al volume S questo verifica l'equazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \eta \Delta_2 \boldsymbol{w} = 4\sqrt{\pi}\,\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\mathrm{P}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,, \tag{32}$$

mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente. Invero prendiamo in esame l'espressione

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\boldsymbol{g}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\eta t}) - \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t}\}\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{33}$$

ed osserviamo che ponendo $\xi = 2u\sqrt{\eta t}$ abbiamo

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \{\boldsymbol{g}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\eta t}) - \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \xi}\,.$$

Perciò la funzione sotto il segno di integrale di volume della (33) resta finita quando $r \to 0$. Possiamo allora applicare l'operatore $(\Delta_2)_{\mathrm{P}}$ sotto il segno di integrazione ed osservando che $\Delta_2 \frac{1}{r} = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta_2\varphi = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta_2 \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \,- \\ & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta_2 \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{dS}}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{S}} \Delta_2 \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(\mathrm{M}, r + 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \right\} \mathrm{dS}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Ora, per il Teorema di Poisson relativo ai potenziali newtoniani di volume, si ha

$$\Delta_2 \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(M\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(P,\,2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du\,.$$

D'altra parte, ricordando che la funzione $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(M\,,r+2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du$ è soluzione dell'equazione omogenea $\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \eta\Delta_2\, \boldsymbol{w} = 0$, risulta

$$\Delta_2 \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g} e^{-u^2}\, du \right\} = \frac{1}{\eta}\,\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g} e^{-u^2}\, du \right\}.$$

Pertanto la (34) porge

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(M\,,r+2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du \right\} = \tag{35}$$

$$= 4\,\sqrt{\pi}\,\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(P,\,2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du$$

e questa dimostra che il vettore $\boldsymbol{w}$, espresso dalla (31), nei punti interni al volume S verifica l'equazione (32), mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente. Esso per analogia ai potenziali newtoniani di volume sarà chiamato *potenziale magnetico*. Confrontando la (32) con l'equazione (13′) si ha che *se si determina il vettore* $\boldsymbol{g}$ *mediante l'inversione dell'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(P,\,2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial z}\, \boldsymbol{u}(P,t)\,, \tag{36}$$

il vettore $\boldsymbol{w}$, *definito dalla* (31), *nei punti interni al volume* S *soddisfa l'equazione* (13′), *mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente.*

Ricordando il valore (24) del vettore $\boldsymbol{u}$, si ha che il vettore $\boldsymbol{g}$ è legato al vettore $\boldsymbol{f}$, considerato precedentemente, dalla relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{g}(P,\,2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du = \tag{37}$$

$$= \frac{1}{4\pi\eta}\,\frac{\partial}{\partial z} \int_S \frac{dS}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M\,,r+2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du\,.$$

Ottenuto il vettore $\boldsymbol{w}$ il campo magnetico indotto $\boldsymbol{h}$ è dato senz'altro dalla (11').

È opportuno osservare che se ad ambo i membri dell'equazione (13') applichiamo a sinistra l'operatore differenziale $\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2$, abbiamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)\boldsymbol{w} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\boldsymbol{u}. \tag{38}$$

Ma dalla (25') si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\boldsymbol{u} = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial z}\int_S \frac{dS}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M\,, 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du$$

e ricordando la (27) risulta ancora

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_S \frac{\mathbf{F}(M\,,t)}{r}\, dS\,.$$

Perciò l'equazione (38) diventa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)\boldsymbol{w} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_S \frac{\mathbf{F}(M\,,t)}{r}\, dS \tag{39}$$

che definisce direttamente il vettore $\boldsymbol{w}$ per mezzo della forza di massa $\mathbf{F}$. Mi riservo di studiare in altro lavoro l'equazione (39). Per quanto riguarda il valore della pressione p, espresso dalla (9), ricordiamo la (25') e la (27) dalle quali segue

$$\operatorname{div} \nabla_\nu \boldsymbol{u} \equiv \operatorname{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta_2\,\boldsymbol{u}\right) =$$

$$= -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\int_S \left\{\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(M\,, 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du\right\} dS =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_S \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times \mathbf{F}(M\,,t)\, dS\,.$$

Sostituendo nella (9) abbiamo

$$\frac{p}{\rho} + a^2 h_z = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times \mathbf{F}(M\,,t)\right\} dS + \frac{p_0}{\rho} \tag{40}$$

che fornisce il valore della pressione dopo aver determinato la componente h_z del campo magnetico indotto.

Si osservi che dalla (5), a meno di una funzione armonica, si ha direttamente

$$\frac{p}{\rho} + a^2 h_z = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathrm{div}_M \mathbf{F}(M, t)}{r} dS,$$

e se al secondo membro di questa si aggiunge la funzione armonica

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\mathbf{F} \times \boldsymbol{n}}{r} d\Sigma + \frac{p_0}{\rho}$$

regolare entro il volume S limitato dalla superficie Σ, essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale esterna a Σ, si ha proprio la (40), come si riconosce facilmente.