ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MEHMET NAMIK OGUZTÖRELI

**Sul problema di Goursat per un'equazione di
Mangeron. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.3, p. 327-336.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_327_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron* (*). Nota I di MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In this paper we investigate a Goursat problem for a polyvibrating equation of D. Mangeron, extending certain results of M. Picone.

Si deve all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone, nell'ambito di una inesauribile mole dei Suoi risultati di vastissima portata, la risoluzione di tutt'una serie d'importantissimi problemi concernenti equazioni alle derivate parziali del secondo ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti, pubblicati nelle Sue Memorie inserite nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo negli anni 1910 [1] e 1911 [2] e ben utilmente riprodotte a Roma nel 1969 in fotocopie.

In ciò che segue si studia, prendendo per ora le mosse dai risultati del § 3 della prima Memoria spettanti a certi problemi lineari, il problema di Goursat per un'equazione polivibrante di Mangeron.

1. Siano $g(x)$ ed $h(y)$ due funzioni di classe C^1 monotone, rispettivamente, negli intervalli $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$ e soddisfacenti le condizioni

$$(1) \quad \begin{aligned} g(0) = h(0) = 0 \quad , \quad 0 \leq g'(0)h'(0) < 1, \\ 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \alpha \quad , \quad 0 \leq h(y) \leq \frac{1}{2}y \leq \alpha. \end{aligned}$$

Siano inoltre $M(x)$ e $P(x)$ funzioni di classe C^3 in $0 \leq x \leq \alpha$ e $N(y)$ e $Q(y)$ funzioni di classe C^3 in $0 \leq y \leq \alpha$ rispettivamente, soddisfacenti le condizioni $M(0) = N(0)$ e $P(0) = Q(0)$. È ovvio che le curve $y = g(x)$ e $x = h(y)$ non hanno altri punti in comune nel quadrato $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq \alpha\}$ fuorché l'origine.

Il problema di Goursat, che consiste nella ricerca di una funzione $u = u(x, y)$ in D di classe C^1 , ivi dotata di derivata totale prima $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ continua e soddisfacente l'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{1,0}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{0,1} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{0,0}(x, y) u + c(x, y)$$

e le condizioni

$$(3) \quad \begin{aligned} u(x, g(x)) &= M(x) \quad \text{per } 0 \leq x \leq \alpha, \\ u(h(y), y) &= N(y) \quad \text{per } 0 \leq y \leq \alpha, \end{aligned}$$

(*) This work was partly supported by the National Research Council of Canada under the Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1972.

ove $a_{i,j}(x, y)$ e $c(x, y)$ sono certe funzioni note sufficientemente nitide in D , era stato esaminato da numerosi Autori sin dal principio del nostro secolo. In connessione con esso problema si deve riferire anzitutto ai lavori da pionieri iniziatisi dall'E. Goursat [3] ed E. Picard [4] e soprattutto all'inesauribile sorgente di nuove idee e di metodi escogitati trovantisì nei memorabili lavori di M. Picone [1] e [2] già menzionati. Un'altra serie di lavori relativi al problema di Goursat trovasi indicata nella bibliografia.

Nel presente lavoro consideriamo il problema di Goursat per un'equazione di Mangeron di cui sotto

$$(4) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \lambda b(x, y) u + c(x, y),$$

ove $b(x, y)$ e $c(x, y)$ sono certe funzioni continue in D e note, indicando λ un parametro. Il problema di Goursat consiste nel caso considerato nel trovare una funzione $u(x, y)$ di classe C^3 in D , ivi dotata di derivata seconda totale $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ continua e soddisfacente (4) e le condizioni

$$(5) \quad \begin{cases} u(x, y) \Big|_{y=g(x)} = M(x), & \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{y=g(x)} = P(x) & (0 \leq x \leq \alpha), \\ u(x, y) \Big|_{x=h(y)} = N(y), & \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=h(y)} = Q(y) & (0 \leq y \leq \alpha). \end{cases}$$

Nei paragrafi susseguenti esamineremo il problema di Goursat (4)-(5). Questo problema può essere considerato come una estensione di una certa parte del famoso lavoro di M. Picone [1]-[2] consacrato al problema di Goursat.

In relazione ai vari altri tipi di problemi di Goursat per equazioni di Mangeron si devono citare i lavori di D. Mangeron e M. N. Oğuztörelì [5], M. N. Oğuztörelì e S. Easwaran [6] e S. Easwaran [7].

2. Dedichiamo anzitutto la nostra analisi al problema di Goursat (5) spettante all'equazione

$$(6) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = c(x, y)$$

alla quale si riduce l'equazione (4) per $\lambda = 0$. Integrando (6) e ponendo

$$(7) \quad C(x, y) = \int_0^x \int_0^y (x - \xi)(y - \eta) c(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \tilde{C}(x, y) = \int_0^x \int_0^y c(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

si trova

$$(8) \quad u(x, y) = C(x, y) + \varphi(x) + \psi(y) + y \int_0^x \rho(\xi) d\xi + x \int_0^y \sigma(\eta) d\eta$$

e

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \tilde{C}(x, y) + \rho(x) + \sigma(y),$$

ove $\varphi(x)$, $\rho(x)$ e $\psi(y)$, $\sigma(y)$ sono funzioni per ora incognite appartenenti alla classe C^1 in $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$ rispettivamente.

Sostituendo (5) nelle relazioni (8) e (9) si ottengono le uguaglianze

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) + \psi(g(x)) + g(x) \int_0^x \rho(\xi) d\xi + x \int_0^{g(x)} \sigma(\eta) d\eta &= \\ &= M(x) - C(x, g(x)) = M_1(x), \\ \varphi(h(y)) + \psi(y) + y \int_0^{h(y)} \rho(\xi) d\xi + h(y) \int_0^y \sigma(\eta) d\eta &= \\ &= N(y) - C(h(y), y) = N_1(y), \\ \rho(x) + \sigma(g(x)) = P(x) - \tilde{C}(x, g(x)) &= P_1(x), \\ \rho(h(y)) + \sigma(y) = Q(y) - \tilde{C}(h(y), y) &= Q_1(y). \end{aligned} \right.$$

Eliminando σ dalle due ultime equazioni (10) si ricava l'equazione di Abel-Schröder (Ved. M. Kuczma [8])

$$(11) \quad \rho[f(x)] - \rho(x) = F(x),$$

ove si è posto

$$(12) \quad f(x) = h[g(x)] \quad , \quad F(x) = Q_1[g(x)] - P_1(x).$$

Evidentemente $f(x)$ e $F(x)$ sono di classe C_1 in $0 \leq x \leq \alpha$ e, tenendo conto nella seconda delle supposizioni (1), si ha pure $0 < f'(0) < 1$. Epperciò, in virtù del teorema generale concernente le equazioni di Schröder ([8], Teorema 4.5), esiste una soluzione dell'equazione (11) e tale soluzione si presenta sotto la forma ([8], Teorema 2.11)

$$(13) \quad \rho(x) = \rho_0 + \sum_{n=0}^{\infty} F[f^n(x)],$$

ove ρ_0 è una costante ed $f^n(x)$ è la n -ma iterata di $f(x)$ e cioè

$$(14) \quad f^0(x) = x \quad , \quad f^1(x) = f(x) \quad , \quad f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

In virtù dell'ultima delle equazioni (10) e della (13) σ si presenta sotto la forma

$$(15) \quad \sigma(y) = Q_1(y) - \rho_0 - \sum_{n=0}^{\infty} F[f^n(h(y))].$$

Poiché, fatte tutte le sostituzioni, la costante ρ_0 sparisce nelle (8) e (9), si può assumere che $\rho_0 = 0$, e dunque le funzioni $\rho(x)$ e $\sigma(y)$ sono unicamente determinate.

Eliminando ora ψ tra le prime due equazioni (10), si ottiene l'equazione funzionale

$$(16) \quad \varphi[f(x)] - \varphi(x) = G(x),$$

ove si è posto

$$(17) \quad G(x) = N_1[g(x)] - M_1(x) + g(x) \int_{f(x)}^x \rho(\xi) d\xi + [x - f(x)] \int_0^{g(x)} \sigma(\eta) d\eta.$$

È ben chiaro che la funzione $G(x)$ è di classe C^1 in $0 \leq x \leq \alpha$. La soluzione dell'equazione di Schröder (16) ha la forma

$$(18) \quad \varphi(x) = \varphi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} G[f^n(x)],$$

ove φ_0 è una costante. Si ha per conseguenza

$$(19) \quad \psi(y) = N_1(y) - \varphi_0 - \sum_{n=0}^{\infty} G[f^n(h(y))] - y \int_0^{h(y)} \rho(\xi) d\xi - h(y) \int_0^y \sigma(\eta) d\eta.$$

Siccome la costante φ_0 che figura nelle (18) e (19) sparisce in (8) dopo aver eseguite tutte le sostituzioni, si può assumere che $\varphi_0 = 0$. E dunque le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono anch'esse determinate in modo univoco.

I risultati di cui sopra mostrano chiaramente che il problema di Goursat (5)-(6) ammette una soluzione unica non appena siano soddisfatte le condizioni precisate nel § 1. Nell'analisi ora eseguita si è tenuto debito conto dei risultati conseguiti dall'A. Bielecki e J. Kysiński [9], Goursat [3] e Picard [4].

3. Si consideri ora il problema di Goursat (4)-(5). In seguito dell'integrazione della (4) si trova l'equazione integrale della funzione incognita

$$(20) \quad u(x, y) = C(x, y) + \varphi(x) + \psi(y) + y \int_0^x \rho(\xi) d\xi + \\ + x \int_0^y \sigma(\eta) d\eta + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y (x - \xi)(y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta,$$

ove, come nel § 2, $\varphi(x)$, $\rho(x)$ e $\psi(y)$, $\sigma(y)$ sono funzioni incognite, di classe C^1 in $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$ rispettivamente. È ben chiaro che si ha pure

$$(21) \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \tilde{C}(x, y) + \rho(x) + \sigma(y) + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta.$$

Introducendo (5) nella (20) e (21) si ottiene la seguente serie di eguaglianze

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1(x) &= \varphi(x) + \psi[g(x)] + g(x) \int_0^x \rho(\xi) d\xi + x \int_0^{g(x)} \sigma(\eta) d\eta + \\ &\quad + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^{g(x)} (x - \xi) [g(x) - \eta] b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \\ N_1(y) &= \varphi[h(y)] + \psi(y) + y \int_0^{h(y)} \rho(\xi) d\xi + h(y) \int_0^y \sigma(\eta) d\eta + \\ &\quad + \lambda \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y [h(y) - \xi] (y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \\ P_1(x) &= \rho(x) + \sigma[g(x)] + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^{g(x)} b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \\ Q_1(y) &= \rho[h(y)] + \sigma(y) + \lambda \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta, \end{aligned} \right.$$

ove M_1, N_1, P_1 e Q_1 sono definite tramite (10). Denotando

$$(23) \quad (Ru)(x) = \int_{f(x)}^x d\xi \int_0^{g(x)} b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta$$

ed eliminando σ tra le ultime due equazioni delle (22), si trova l'equazione funzionale di Schröder-Abel

$$(24) \quad \rho[f(x)] - \rho(x) = F(x) + \lambda(Ru)(x),$$

ove $F(x)$ è definita tramite (12). È chiaro che l'operatore $(Ru)(x)$ è di classe C^1 in $0 \leq x \leq \alpha$ per ogni $u(x, y)$ continua in D . Epperò, la soluzione dell'equazione funzionale (24) è di forma

$$(25) \quad \rho(x) = \rho_0 + \sum_{n=0}^{\infty} F[f^n(x)] + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (Ru)[f^n(x)],$$

ove ρ_0 è una costante. Si ha poi, tenendo conto dell'ultima delle equazioni (22),

$$(26) \quad \sigma(y) = Q_1(y) - \rho_0 - \sum_{n=0}^{\infty} F[f^n(h(y))] - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (Ru)[f^n(h(y))].$$

Siccome la costante ρ_0 sparisce dopo aver sostituito (25) e (26) nelle (20)-(21) e nelle prime due equazioni (22), si può scegliere sin dal principio $\rho_0 = 0$ ed in tal modo le funzioni ρ e σ risultano unicamente determinate per ogni funzione data e continua $u = u(x, y)$.

Sostituendo ora (25) e (26) nelle prime due equazioni (22) ed eliminando ψ si ottiene l'equazione di Schröder-Abel

$$(27) \quad \varphi [f(x)] - \varphi(x) = H(x) + \lambda \{ (Su)(x) + (Tu)(x) \},$$

ove si è posto

$$(28) \quad H(x) = N_1[g(x)] - M_1(x) + \int_{f(x)}^x d\xi \int_0^{g(x)} \left\{ Q_1(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} (F[f^n(\xi)] - F[f^n(h(\eta))]) \right\} d\eta,$$

$$(29) \quad (Su)(x) = \int_{f(x)}^x d\xi \int_0^{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ (Ru)[f^n(\xi)] - (Ru)[f^n(h(\eta))] \} d\eta$$

e

$$(30) \quad (Tu)(x) = \int_0^x d\xi \int_0^{g(x)} (x - \xi)(g(x) - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta - \int_0^{f(x)} d\xi \int_0^{g(x)} (f(x) - \xi)(g(x) - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta.$$

È chiaro che $H(x)$, $(Su)(x)$ e $(Tu)(x)$ sono di classe C^1 in $0 \leq x \leq \alpha$ per ogni u continua in D . Epperciò, la soluzione dell'equazione funzionale (27) ha la forma

$$(31) \quad \varphi(x) = \varphi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} H[f^n(x)] + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \{ (Su)[f^n(x)] + (Tu)[f^n(x)] \},$$

ove φ_0 è una costante. Si ha inoltre, in virtù delle (22),

$$(32) \quad \begin{aligned} \psi(y) = & N_1(y) - \varphi_0 - \sum_{n=0}^{\infty} H[f^n(h(y))] - \\ & - \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y \left\{ Q_1(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} (F[f^n(\xi)] - F[f^n(h(\eta))]) \right\} d\eta + \\ & + \lambda \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} ((Ru)[f^n(\xi)] + (Ru)[f^n(h(\eta))]) - \right. \\ & - (h(y) - \xi)(y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) \left. \right\} d\eta - \\ & - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \{ (Su)[f^n(h(\eta))] + (Tu)[f^n(h(\eta))] \}. \end{aligned}$$

Siccome la costante φ_0 sparisce non appena sono state eseguite nella (20) le sostituzioni (31) e (32), si può assumere che $\varphi_0 = 0$. E pertanto, le funzioni φ e ψ risultano unicamente determinate per ogni data funzione $u(x, y)$ continua in D.

Sostituendo ora nell'equazione (20) le (25), (26), (31) e (32) si ottiene la seguente equazione integro-funzionale nella funzione incognita $u(x, y)$

$$(33) \quad u(x, y) = W(x, y) + \lambda(Au)(x, y),$$

ove si è posto

$$(34) \quad W(x, y) = C(x, y) + N_1(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \{H[f^n(x)] - H[f^n(h(y))]\} + \\ + \int_{h(y)}^x d\xi \int_0^y \left\{ Q_1(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} (F[f^n(\xi)] - F[f^n(h(\eta))]) \right\} d\eta$$

e

$$(35) \quad (Au)(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \{(Su)[f^n(x)] - (Su)[f^n(h(y))]\} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \{(Tu)[f^n(x)] - (Tu)[f^n(h(y))]\} + \\ + \int_{h(y)}^x d\xi \int_0^y \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} ((Ru)[f^n(\xi)] + (Ru)[f^n(h(\eta))]) \right\} d\eta - \\ - \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y (h(y) - \xi)(y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta + \\ + \int_0^x d\xi \int_0^y (x - \xi)(y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta.$$

È chiaro che la funzione $W(x, y)$ appartiene alla classe C^3 in D e possiede ivi la seconda derivata totale $\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}$ continua. L'equazione integro-differenziale (33) può essere considerata come un'estensione dell'equazione integro-funzionale di M. Picone impareggiabilmente studiata nei Suoi lavori [1] e [2]. In ciò che segue si espone lo studio dell'equazione funzionale (33).

4. Siccome le funzioni $y = g(x)$ e $x = h(y)$ sono state supposte monotone e crescenti in $0 \leq x \leq \alpha$ e $0 \leq y \leq \alpha$ rispettivamente, si ha

$$(36) \quad 0 < f^{n+1}(x) < f^n(x) < \dots < f^2(x) < f^1(x) < x \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0.$$

Si costata pure che i rettangoli

$$(37) \quad D_n(x) = \{(\xi, \eta) \mid f^{n+1}(x) \leq \xi \leq f^n(x), 0 \leq \eta \leq g[f^n(x)]\} \\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

non si ricoprono e

$$(38) \quad D(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n(x) \subset D \quad (0 \leq x \leq \alpha).$$

Si ha, per conseguenza,

$$(39) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} (Ru)[f^n(x)] \right| \leq \iint_{D(x)} |b(\xi, \eta) u(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq \alpha^2 \beta \|u\| \quad (0 \leq x \leq \alpha)$$

come pure

$$(40) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} (Ru)[f^n(h(y))] \right| \leq \alpha^2 \beta \|u\|, \quad (0 \leq y \leq \alpha),$$

ove si è posto

$$(41) \quad \beta = \max_D |b(x, y)|, \quad \|u\| = \max_D |u(x, y)|.$$

Si ha inoltre, in virtù delle (39) e (40), per $(x, y) \in D$,

$$(42) \quad \left| \int_{h(y)}^x d\xi \int_0^y \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} ((Ru)[f^n(\xi)] + (Ru)[f^n(h(\eta))]) \right\} d\eta \right| \leq 2 \alpha^2 \beta xy \|u\|.$$

In un simile modo si può dimostrare, per $(x, y) \in D$, che

$$(43) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(Su)[f^n(x)]| \leq 2 \alpha^2 \beta x^2 \|u\|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(Su)[f^n(h(y))]| \leq 2 \alpha^2 \beta xy \|u\|.$$

Si considerino ora i seguenti rettangoli

$$(44) \quad D_n^*(x) = \{(\xi, \eta) \mid 0 \leq \xi \leq f^n(x), 0 \leq \eta \leq g[f^n(x)]\}, \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \\ D_n^{**}(x) = \{(\xi, \eta) \mid 0 \leq \xi \leq f^{n+1}(x), 0 \leq \eta \leq g[f^n(x)]\}.$$

Le considerazioni geometriche assai semplici conducono alle disuguaglianze

$$(45) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{D_n^*(x)} d\xi d\eta \leq \alpha^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{D_n^{**}(x)} d\xi d\eta \leq \alpha^2 \quad (0 \leq x \leq \alpha)$$

e, conseguentemente, per $0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq \alpha$, alle maggiorazioni

$$(46) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(Tu)[f^n(x)]| \leq 2 \alpha^2 \beta x^2 \|u\|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(Tu)[f^n(h(y))]| \leq 2 \alpha^2 \beta y^2 \|u\|.$$

Finalmente si ottiene, per $(x, y) \in D$,

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^{h(y)} d\xi \int_0^y (h(y) - \xi) (y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta \right| < \alpha^2 \beta y^2 \|u\|, \\ \left| \int_0^x d\xi \int_0^y (x - \xi) (y - \eta) b(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta \right| < \alpha^2 \beta xy \|u\|. \end{array} \right.$$

Combinando (35), (42), (43), (46) e (47), si trova

$$(48) \quad |(Au)(x, y)| < \alpha^2 \beta (4x^2 + 5xy + 3y^2) \|u\|.$$

Sia ora $\mathcal{C}$ lo spazio di tutte le funzioni continue in D dotate di norma uniforme in esso dominio. È ben chiaro che l'operatore A è lineare ed applica $\mathcal{C}$ in sé stesso. Si ha inoltre

$$(49) \quad \|A\| = \text{lub}_{u \neq 0} \frac{\|(Au)(x, y)\|}{\|u\|} < 12 \alpha^4 \beta,$$

donde risulta che A è limitato in $\mathcal{C}$. E pertanto, l'equazione (33) e cioè l'equazione

$$(50) \quad (I - \lambda A) u(x, y) = W(x, y)$$

ammette una soluzione unica per

$$(51) \quad |\lambda| < \frac{1}{12 \alpha^4 \beta} < \frac{1}{\|A\|}$$

e questa soluzione è data dalla formula

$$(52) \quad u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n W(x, y).$$

Poiché la funzione $W(x, y)$ è di classe C^3 in D e ne possiede ivi la seconda derivata totale di Picone continua, risulta (ved. K. Yosida, [10]) che la funzione $u(x, y)$ definita tramite (52) è pur essa di classe C^3 e ne ha, in D , la seconda derivata totale $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ continua. E pertanto, la funzione $u(x, y)$ data tramite la serie (52) è l'unica soluzione del problema di Goursat (4)-(5) nel caso in cui λ soddisfa l'ineguaglianza (51) ⁽¹⁾.

In una serie di lavori susseguenti ci occuperemo di certe estensioni alle equazioni polivibranti di Mangeron della ingente mole di profondissimi risultati dovuti all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone da Lui esposti nelle già citate Memorie [1] e [2] e rimasti ben inspiegabilmente non sfruttati sin'ora ⁽²⁾.

(1) L'Autore non si è proposto in questa sua Nota di studiare l'ottimizzazione delle maggiorazioni concernenti le disuguaglianze (39)-(40), (42)-(43), (45)-(49) e (51).

(2) Vedansi anche il recente elenco dei lavori dell'Illustre Maestro Mauro Picone [11] come pure i Suoi lavori citati nel [12].

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. PICONE, *Sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », 30, 349–376 (1910).
- [2] M. PICONE, *Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », 31, 133–190 (1911).
- [3] E. GOURSAT, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, « Ann. Fac. Sci. Toulouse », 5, 117–144 (1903).
- [4] E. PICARD, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 144, 1049–1052 (1907).
- [5] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, a) *Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an F-Function*, « Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. », 67, 1488–1492 (1970).
b) *Solutions de certains systèmes polyvibrants exprimés par la fonction « F » de Truesdell*, « Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique », ser. V, 56, 267–274 (1970).
- [6] M. N. OĞUZTÖRELI e S. EASWARAN, *A Goursat problem for a high order Mangeron equation*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, 50 (1971).
- [7] S. EASWARAN, *A Study on Certain Higher Order Partial Differential Equations of Mangeron*, Dissertation. University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1972.
- [8] M. KUCZMA, *Functional Equations in a Single Variable*, PAN, Monografie Matematyczne, 46, Warszawa 1968.
- [9] A. BIELECKI e J. KISYNSKI, *Sur le problème de E. Goursat relative à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$* , « Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska », Sect. A10, 99–126 (1965).
- [10] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.
- [11] M. PICONE, « Annuario dell'Accademia dei LX », 1–29 (1961).
- [12] M. PICONE: a) *Sopra un'equazione integrale di prima specie a limiti variabili, considerata da Volterra*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. V-a, 19, 259–265 (1910). b) *Le equazioni alle variazioni per cause perturbatrici variabili nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. V, 28, 127–131 (1919). c) *Su alcuni problemi di determinazione delle soluzioni di equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine di tipo iperbolico*, « Atti Accad. Sci. Istituto di Bologna, Cl. sci. fis. », Anno 258°, ser. XII, 8, 60–71 (1970).
- [13] A. MYLLER e V. VALCOVICI, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles*, « Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine », 3, 165–171 (1915).
- [14] C. POPOVICI, *Sur une équation fonctionnelle*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 158, 1867–1868 (1914).
- [15] R. BADESCU, *Sur une équation fonctionnelle*, « Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique », 15, 1062–1072 (1929).
- [16] M. GHERMANESCU, *Ecuații funcționale (Equazioni funzionali)*, Edit. Acad. R. S. Romania, Bucarest 1960.