Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Infantino

Un Teorema dì singolarità eliminabili per le soluzioni deboli delle equazioni lineari ellittiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.3, p. 319–326.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_319_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Un Teorema di singolarità eliminabili per le soluzioni deboli delle equazioni lineari ellittiche.* Nota di ROBERTO INFANTINO (*), presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — Two theorems are proved on removable singularities for weak solutions of a linear elliptic equation, which sharpen a result given earlier by the author, in the particular case the singularities lie on the manifold $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ of $\mathbf{R}^n$.

In una Nota precedente [2] ho stabilito, come Corollario immediato di un risultato più generale, un Teorema di singolarità eliminabili per le soluzioni deboli dell'equazione:

$$\sum_{|i|,|j|\leq m} (-1)^{|j|} D^j (a_{ij} D^i u) = f. \tag{1}$$

In questo lavoro, valendomi anche del risultato della Nota [2], riesco a migliorare il risultato precedente nel caso particolare in cui la varietà singolare è una porzione chiusa della varietà di $\mathbf{R}^n$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

L'enunciato dei risultati ottenuti e il confronto con l'analogo risultato del lavoro [2] si trovano nel n. 1, mentre nel n. 2 si riportano le dimostrazioni.

1. NOTAZIONI E RISULTATI

Sia A un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$. Se S è un insieme chiuso e non vuoto di misura nulla contenuto in A, per ogni $x_0 \in A - S$ poniamo:

$$\rho(x_0) = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x_0, S)$$

$$I(x_0) = A \cap \{x : |x - x_0| < \rho(x_0)\}.$$

Se $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ è una n-pla di interi non negativi poniamo:

$$|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n \quad , \quad s(\mu) = (\mu_{s+1}, \cdots, \mu_n),$$

$$D^\mu = D_{x_1}^{\mu_1} \cdots D_{x_n}^{\mu_n}, \qquad \text{dove} \quad D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Posto:

$$\|u\|_{L^p(A)} = |u|_{p,A} \quad , \quad |D^k u|_{2,A} = \sup_{|\sigma|=k} |D^\sigma u|_{2,A},$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1972.

denotiamo con L^p_α, α reale e $1 \leq p \leq \infty$, lo spazio delle funzioni u tali che $\rho^\alpha u \in L^p_\alpha(A)$ con la norma:

$$|u|_{p,\alpha} = |\rho^\alpha u|_{p,A}.$$

Con $W^m_\alpha(A)$, α reale, indichiamo lo spazio di Sobolev con peso, introdotto da M. Troisi in [3], delle distribuzioni u su A tali che $D^\mu u \in L^2_{\alpha+|\mu|-m}$, con norma:

$$\|u\|_{W^m_\alpha(A)} = \sum_{h=0}^{m} |D^h u|_{2,\alpha+h-m}.$$

Inoltre denotiamo con $H^m_0(A)$ la chiusura di $C^\infty_0(A)$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_{H^m_0(A)} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_A |D^\alpha u|^2 \, dx\right]^{1/2}.$$

Infine indichiamo con $a(u, v)_A$ (con $a(u, v)$ se non v'è luogo ad equivoci) la forma sesquilineare:

$$a(u, v)_A = \sum_{|i|,|j|\leq m} \int_A a_{ij} D^i u \, \overline{D^j v} \, dx,$$

dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni complesse definite e misurabili in A.

Prima di enunciare i risultati di questo lavoro, premettiamo il seguente Teorema, che si ricava tenendo presente il Teorema e le Osservazioni I e III di [2].

TEOREMA I. – *Sia μ un numero reale ed f una funzione di classe $L^2_{2m+\mu}(A)$. Supponiamo che i coefficienti a_{ij} della forma sesquilineare $a(u, v)_A$ siano di classe $L^2_{2m-|i|-|j|}(A)$ e risulti*:

$$|D^m v|^2_{2,A} \leq C_0 (|a(u, v)| + |v|^2_{2,-\mu}) \qquad \forall v \in H^m_0(I(x_0)),$$

dove c_0 è una costante positiva che non dipende né da x_0 né da v.

Allora per ogni funzione $u \in L^2_\mu(A)$ tale che per ogni compatto $T \subset \bar{A} - S$:

$$u \in W^m(T) \quad , \quad a(u, v) = \int_A f\bar{v} \, dx \qquad \forall v \in H^m_0(T),$$

si ha $u \in W^m_{\mu+m}(A)$.

Passiamo ora ad enunciare il nostro primo risultato. Posto $s = n - h$, indichiamo con V_h la varietà di $\mathbf{R}^n$ ad h dimensioni $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ e, per ogni $r > 0$, denotiamo con G_r la sfera $\{x : |x| < r\}$, con Σ_r la semisfera $\{x : |x| < r, x_1 \geq 0\}$ e con Γ_r l'insieme $\{x : |x| < r, x_1 = 0\}$.

Assegnamo due numeri positivi $r < R$, e, posto:

$$S = V_h \cap \bar{G}_r = V_h \cap \bar{\Sigma}_r \quad , \quad S_R = V_h \cap \bar{G}_R = V_h \cap \bar{\Sigma}_R,$$

denotiamo con $x_0 \in S_r$ la proiezione su V_h di ogni punto $x \in \bar{G}_r$.

Posto $\mathring{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x_0)$, facciamo le seguenti ipotesi:

a) Sia $f \in L^2(G_R)$ e i coefficienti a_{ij} della forma $a(u, v)_{G_R}$ siano limitati; inoltre risulti:

$$a_{ij} \in C^0(\overline{G}_R), \qquad \text{per} \quad |i| = |j| = m;$$
$$\mathring{a}_{ij} \in C^{|i|}(\overline{G}_R), \qquad \text{per} \quad |s(i)| = |i| \quad ^{(1)}.$$

b) Risulti:

$$Re \sum_{|i|,|j|=m} a_{ij}(x)\,\zeta^{i+j} \geq \Lambda\,|\zeta|^{2m} \qquad \forall x \in \overline{G}_R \quad \text{e} \quad \forall \zeta \in \mathbf{R}^n,$$

dove Λ è una costante positiva che non dipende da x e ζ.

c) Per $|i| = m$ riesca:

$$\forall x \in \overline{G}_R \qquad |\mathring{a}_{ij}(x) - a_{ij}(x)| \leq c\rho^\lambda(x), \qquad \text{con} \quad 0 < \lambda \leq 1$$

e c costante positiva che non dipende da x e da λ.

TEOREMA II. – *Siano soddisfatte le ipotesi* a), b), c) *e sia* $n > 2m + h$, *con* $\frac{hm}{n} < \lambda$. *Allora per ogni funzione* $u \in L^2_\alpha(G_R)$, *con* $\alpha < \inf\left(\lambda - \frac{hm}{n}, \frac{n-h}{2} - 2m\right)$, *tale che per ogni compatto* $T \subset \overline{G}_R - S$:

$$u \in W^m(T) \quad , \quad a(u, v) = \int_{\dot{G}_R} f\bar{v}\,dx \qquad \forall v \in H_0^m(T), \tag{2}$$

si ha $u \in W^m(G_R)$.

OSSERVAZIONE I. – Detta n_0 la parte intera di $\frac{h + 4m + 2\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, dove $\Delta = (h + 4m + 2\lambda)^2 - 8mh$, la condizione imposta ad α nell'enunciato del Teorema può scriversi:

$$\alpha < \frac{n-h}{2} - 2m \qquad \text{per} \quad 2m + h < n \leq n_0; \tag{3}$$

$$\alpha < \lambda - \frac{hm}{n} \qquad \text{per} \quad n \geq n_0 + 1. \tag{4}$$

Invero:

$$\frac{n-h}{2} - 2m \leq \lambda - \frac{mh}{n} \Longleftrightarrow n_1 \leq n \leq n_2,$$

dove:

$$n_i = \frac{h + 4m + 2\lambda}{2} + (-1)^i \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad i = 1, 2;$$

inoltre, per gli indicati valori di n e per $h < \frac{n\lambda}{m}$, risulta $n_1 < 2m + h < n_0$.

(1) Ovviamente tale ipotesi equivale a dire che la restrizione di a_{ij} a S_R è di classe $C^{|i|}(G_R)$.

OSSERVAZIONE II. – L'ipotesi $u \in L^2_\alpha(G_R)$ nel caso (3) è soddisfatta, per esempio, se $u = O(\rho^{-(n-2m-h)+\delta})$, con $\delta > 0$.

OSSERVAZIONE III. – Dal Teorema I si ottiene, come Corollario, quando si assuma $\mu = -m$, un Teorema di singolarità eliminabili per le soluzioni $u \in L^2_{-m}(A)$. Ora il Teorema II fornisce un risultato dello stesso tipo, salvo che alla condizione $u \in L^2_{-m}(A)$ si sostituisce l'altra $u \in L^2_\alpha(G_R)$, dove α ha il valore indicato nell'enunciato.

Poiché si ha $\alpha > -m$, il risultato del Teorema II migliora quello del Teorema I, sempre che, naturalmente, si prescinda dalle ipotesi più restrittive sulla forma $a(u, v)$ e sull'insieme singolare S, che nel Teorema II deve essere una porzione chiusa della varietà V_h.

Sia ora Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ tale che:

I) risulti

$$\Sigma_R \subset \Omega \quad , \quad \Gamma_R \subset \partial\Omega ;$$

II) $\partial\Omega - S$ sia una varietà ad $n - 1$ dimensioni di classe C^1; inoltre esista un intorno n-dimensionale U di $\partial\Omega - S$ tale che l'insieme $U \cap \Omega$ sia dotato della proprietà di cono e si trovi « localmente da una stessa parte di $\partial\Omega - S$ ».

Supponiamo che:

a') Sia $f \in L^2(\Omega)$ e i coefficienti a_{ij} della forma $a(u, v)_\Omega$ siano di classe $L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Sigma_R)$; inoltre risulti:

$$a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{per} \quad |i| = |j| = m ;$$
$$\mathring{a}_{ij} \in C^{|i|}(\overline{\Omega}) \qquad \text{per} \quad |s(i)| = |i| .$$

b') Risulti:

$$\mathrm{Re} \sum_{|i|,|j|=m} a_{ij}(x)\, \zeta^{i+j} \geq \Lambda\, |\zeta|^{2m} \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \forall \zeta \in \mathbf{R}^n,$$

dove Λ è una costante positiva indipendente da x e da ζ.

c') Per $|i| = m$ riesca:

$$\forall x \in \overline{\Sigma}_R \qquad |\mathring{a}_{ij}(x) - a_{ij}(x)| \leq c\rho^\lambda(x) ,$$

con $0 < \lambda < 1$ e c costante positiva che non dipende da x e da λ.

Sussiste il seguente

TEOREMA III. – *Siano soddisfatte le ipotesi* I), II), a'), b'), c') *e sia* $n > 2m + h$, con $\frac{hm}{n} < \lambda$. *Allora, per ogni funzione* $u \in L^2_\alpha(\Omega)$, *con* $\alpha < \inf\left(\lambda - \frac{hm}{n}, \frac{n-h}{2} - 2m\right)$, *tale che per ogni compatto* $T \subset \overline{\Omega} - S$:

$$(2') \qquad u \in W^m(T) \quad , \quad a(u, v) = \int_\Omega f \bar{v}\, dx \qquad \forall v \in H^m_0(T),$$

e

$$\frac{D^k u}{\partial \nu^k} = 0 \qquad su \quad \partial\Omega - S , \qquad k = 0 , 1 , \cdots , m - 1 ,$$

dove ν *denota la normale interna a* $\partial\Omega - S$, *si ha* $u \in W^m(\Omega)$.

Anche per il Teorema III valgono le Osservazioni I e II, relative al Teorema II. Per quanto riguarda il confronto del Teorema III con il Corollario che trovasi in [2], si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte per il Teorema II nell'Osservazione III.

2. DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI II e III

Premettiamo il seguente

LEMMA. - *Se* $1 \leq p < 2$, $u \in L^2_\lambda(\Omega)$, *allora riesce*:

$$u \in L^p_\beta(\Omega) \qquad \forall \beta > \lambda - \frac{s(2-p)}{2} .$$

Invero si ha per la diseguaglianza di Hölder:

$$\int_\Omega |u|^p \rho^{p\beta} \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \rho^{2\lambda} \, dx \right)^{p/2} \left(\int_\Omega \rho^{\frac{2(\beta-\lambda)}{2-p} p} \, dx \right)^{(2-p)/2}$$

e risulta:

$$\frac{2(\lambda-\beta)}{2-p} p < s \qquad \forall \beta > \lambda - \frac{s(2-p)}{2} .$$

Dimostriamo ora il Teorema II. Anzitutto per il Teorema I risulta $u \in W^m_{\alpha+m}(\Omega)$.

Indichiamo con η_ε una funzione di classe $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ tale che:

$$(5) \qquad \eta_\varepsilon^{(x)} \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \rho(x) \leq \varepsilon , \\ = 1 & \text{per} \quad \rho(x) \geq 2\varepsilon , \end{cases}$$

$$(6) \qquad |D^\sigma \eta_\varepsilon(x)| \leq \frac{c_1}{\rho^\sigma} ,$$

dove la costante c_1 dipende soltanto da G_R.

Dalla (2) si ottiene:

$$(7) \qquad \sum_{|i|,|j|\leq m} \int_{G_R} a_{ij} D^i u \, \overline{D^j(\eta_\varepsilon v)} \, dx = \int_{G_R} f \, \overline{\eta_\varepsilon v} \, dx \qquad \forall v \in C_0^\infty(G_R) .$$

Posto:

$$\mathring{a}(u , v) = \sum_{|i|,|j|\leq m} \int_{G_R} \mathring{a}_{ij} D^i u \, D^j v \, dx ,$$

$$\sum_{|i|\leq m} (\mathring{a}_{ij} - a_{ij}) D^i u = f_j ,$$

ne viene:

$$\mathring{a}(u, \eta_\varepsilon v) = \sum_{|j| \leq m} \int_{G_R} f_j \overline{D^j(\eta_\varepsilon v)}\, dx + \int_{G_R} f\, \overline{\eta_\varepsilon v}\, dx. \tag{8}$$

Posto ancora:

$$\mathring{A}v = \sum_{|i|, |j| \leq m} (-1)^{|i|} D^i(\mathring{a}_{ij} D^j v),$$

integrando per parti a primo membro della (8), si ha:

$$\int_{G_R} u\mathring{A}(\eta_\varepsilon v)\, dx = \sum_{|j| = m} \int_{G_R} f_j \overline{D^j(\eta_\varepsilon v)}\, dx + \int_{G_R} f\, \overline{\eta_\varepsilon v}\, dx. \tag{9}$$

Essendo $u \in W^m_{\alpha+m}(G_R)$, tenendo conto delle (5) e della (6), nonché dell'ipotesi a) e del fatto che $\alpha < \frac{n-h}{2} - 2m$, si ottiene:

$$|u\mathring{A}(\eta_\varepsilon v)| \leq c_v |u| (1 + \rho^{-2m}),$$

$$|f_j \overline{D^j(\eta_\varepsilon v)}| \leq c_v \sum_{|i| \leq m} |D^i u| (1 + \rho^{-m}),$$

dove c_v è una costante che dipende da v. Pertanto, poiché $\alpha < \frac{n-h}{2} - 2m$, in forza del Lemma premesso, implica

$$\rho^{-2m} u \in L^1(G_R) \quad , \quad \rho^{-m} \sum_{|i| \leq m} D^i u \in L^1(G_R),$$

è lecito il passaggio al limite per $\varepsilon \to 0$ nella (9). Ne viene:

$$\int_{G_R} u\, \mathring{A}v\, dx = \int_{G_R} \sum_{|j| \leq m} f_j \overline{D^j v}\, dx + \int_{G_R} f\bar{v}\, dx \qquad \forall v \in C_0^\infty(G_R). \tag{10}$$

Avendosi:

$$|f_j| \leq c_2 \Big(\sum_{|\sigma| = m} \rho^\lambda |D^\sigma u| + \sum_{|\sigma| < m} |D^\sigma u| \Big), \tag{11}$$

con $0 < \lambda < 1$, osservato che:

$$u \in W^m_{\alpha+m}(G_R) \Rightarrow \sum_{|\sigma| < m} D^\sigma u \in L^2_{\alpha+m-1}(G_R),$$

riesce $f_j \in L^2_{\alpha+m-\lambda}(G_R)$. Quindi, se ora è $\alpha + m \leq \lambda$, risulta $f_j \in L^2(G_R)$. Allora per il Teorema 6.1 della Memoria [1] di S. Agmon segue $D^\gamma u \in L^2(G_R)$ per $|\gamma| = m$ e quindi $u \in W^m(G_R)$.

Se invece $\alpha + m > \lambda$, ricordando che $s = n - h$, si ha

$$f_j \in L^p(G_R) \qquad \forall p < \frac{2s}{s + 2\alpha + 2m - 2\lambda} = p^*$$

ed è $p^* > 0$, perché, avendo supposto $s > 2m$, risulta $s + 2\alpha + 2m - 2\lambda > 0$.

Ne viene, per il Teorema di S. Agmon sopra richiamato,

$$D^{\gamma} u \in L^{p}(G_R) \qquad \forall p \in [1\,,p^*[\qquad \text{e per} \quad |\gamma| = m.$$

Da ciò segue per il Teorema di Sobolev: $u \in L^q(G_R)$ $\forall q \in [1\,,q^*[$, con

$$q^* = \frac{2\,ns}{n(s+2\alpha+2m-2\lambda)-2ms},$$

e riesce $q^* > 2$, in quanto per ipotesi è $\alpha + m < \lambda + \frac{ms}{n}$.

Ora per la diseguaglianza di Hölder, $u \in L^q(G_R)$, con $q > 2$, implica

$$u \in L^2_{-\delta} \qquad \forall \delta \in \left]0\,,\frac{s(q-2)}{2q}\right[.$$

Pertanto, essendo:

$$\frac{s(q-2)}{2q} < \frac{s(q^*-2)}{2q^*} = \frac{ms}{n} + \lambda - \alpha - m = \delta^*$$

riesce anche: $u \in L^2_{-\delta}(G_R)$.

Allora, tenendo conto del Teorema I, si ottiene:

$$D^{\gamma} u \in L^2_{m-\delta}(G_R) \qquad \forall\, |\gamma| = m \quad \text{e} \quad \forall \delta \in\,]0\,,\delta^*[.$$

Avendosi, poi, per l'ipotesi $\frac{hm}{n} < \lambda$:

$$\delta^* + \alpha = \lambda - \frac{h}{n}\,m \geq \lambda - \frac{hm}{\left[\frac{h}{\lambda}\,m\right]+1} = \lambda' > 0,$$

dove $\left[\frac{h}{\lambda}\,m\right]$ denota la parte intera di $\frac{hm}{\lambda}$, risulta:

$$D^{\gamma} u \in L^2_{\alpha+m-\lambda'}(G_R) \qquad \forall\, |\gamma| = m,$$

con λ' quantità positiva che non dipende da α.

Iterando il ragionamento si ottiene la tesi del Teorema.

Dimostrazione del Teorema III. – Per il Teorema contenuto in [2] risulta $u \in W^m_{\alpha+m}(\Omega)$.

Indichiamo con $C^{\infty}_{*}(\overline{\Sigma}_R)$ la classe delle funzioni $v \in C^{\infty}(\overline{\Sigma}_R)$ che soddisfano le condizioni al contorno:

$$D^k_{x_1} v = 0 \qquad \text{su} \quad \Gamma_R \qquad \text{per} \qquad k = 0\,,1\,,\cdots,m-1\,,$$
$$\varphi \equiv 0 \qquad \text{in un intorno di} \quad \partial\Sigma_R - \Gamma_R.$$

Se $\eta_\varepsilon(x)$ è una funzione di classe $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ che verifica le (5), (6) dalla (2′) si ottiene:

$$(7') \qquad \sum_{|i|,|j| \leq m} \int_{\Sigma_R} a_{ij}\, D^i u\, \overline{D^j(\eta_\varepsilon v)}\, dx = \int_{\Sigma_R} f\, \overline{\eta_\varepsilon v}\, dx \qquad \forall v \in C^{\infty}_{*}(\Sigma_R).$$

Dalla (7'), con lo stesso ragionamento tenuto per ricavare dalla (7) la (10), si trae:

$$(10') \qquad \int_{\Sigma_R} u\,\mathring{A}v\,dx = \sum_{|j|\le m} \int_{\Sigma_R} f_j\,\overline{D^j v}\,dx + \int_{\Sigma_R} f\bar{v}\,dx \qquad \forall v \in C_*^\infty(\Sigma_R).$$

A questo punto si procede con i ragionamenti che seguono la (10), applicando il Teorema 6.2 del lavoro [1] e il Teorema contenuto in [2] invece del Teorema I.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, *The L_p approach to the Dirichlet problem*, «Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa», *13*, 405–448 (1959).

[2] R. INFANTINO, *Un Teorema di regolarizzazione in spazi di Sobolev con peso per le soluzioni deboli delle equazioni lineari ellittiche*, «Ric. di Matem.», *20*, 232–240 (1971).

[3] M. TROISI, *Problemi ellittici con dati singolari*, «Ann. di Matem.», *83*, 363–407 (1969).