Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvano Matarasso

Esistenza ed unicità delle soluzioni del problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.3, p. 312–318.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_312_0>

Analisi matematica. — *Esistenza ed unicità delle soluzioni del problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche* (*). Nota II di SILVANO MATARASSO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — After having shown some cases in which one can apply theorems of Nota I, we give a theorem of Freedholm alternative. Then we consider solutions of the problem, having at infinity an assigned polinomial growth and prove for them a theorem of existence and uniqueness.

4. ESEMPI

Introduciamo una funzione $K(r, s)$, con r ed s variabili reali non negative, e sia $K(r, s)$ non negativa e positivamente omogenea di grado -1.

Fissato un numero reale α poniamo:

$$\int_0^{+\infty} K(1, t)\, t^{n-1-2\alpha}\, dt = M_1 \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{K(t, 1)}{t^{2\alpha}}\, dt = M_2 .$$

Sussiste il seguente Lemma (in proposito vedi G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Polya [8] pag. 229 e seg.):

LEMMA 4.1. *Nell'ipotesi che* $f(r) \cdot r^{(n-1)/2}$ *sia di quadrato integrabile in* $[0, +\infty[$, *vale la seguente diseguaglianza*:

$$\int_0^{+\infty} \left(s^{(n-1)/2} \int_0^{+\infty} K(r, s) f(r)\, dr \right)^2 ds \leq M_1 \cdot M_2 \int_0^{+\infty} f^2(r) \cdot r^{n-1}\, dr . \tag{4.1}$$

Se infatti $g(s)$ è una funzione di quadrato integrabile in $[0, +\infty[$, si ha:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{(n-1)/2} K(r, s) f(r) g(s)\, dr\, ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{n-1-2\alpha} K(r, s) f^2(r) r^{2\alpha}\, dr\, ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g^2(s)\, s^{2\alpha} \frac{K(r, s)}{r^{2\alpha}}\, dr\, ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} f^2(r)\, r^{n-1}\, dr \int_0^{\infty} K(1, t)\, t^{n-1-2\alpha}\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} g^2(s)\, ds \int_0^{+\infty} \frac{K(t, 1)}{t^{2\alpha}}\, dt \right)^{1/2},$$

e quindi l'asserto.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

Dal Lemma 4.1 si deduce facilmente il Lemma seguente [4]:

LEMMA 4.2. *Nell'ipotesi che* $2\tau < n - 2m$ *esiste una costante* N *tale che* $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *si abbia*:

$$\int_\Omega \varphi^2(x)\,|x|^{-2m-2\tau}\,dx \leq N \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega (D^\alpha\varphi)^2\,|x|^{-2\tau}\,dx, \tag{4.2}$$

con N *indipendente dal diametro del supporto di* φ.

E infatti ponendo

$$K(r, s) \begin{cases} = (r-s)^{m-1}\, r^\tau s^\sigma & r \geq s \\ = 0 & r < s, \end{cases} \tag{4.3}$$

con $m+\tau+\sigma = 0$ e scegliendo α in modo che $m+\tau < 2\alpha < n-(m+\tau)$, si ottiene dalla (4.1):

$$\int_0^{+\infty} s^{n-1-2m-2\tau}\left(\int_s^{+\infty}(r-s)^{m-1}\, r^\tau f(r)\,dr\right)^2 \leq M_1\cdot M_2 \int_0^{+\infty} f^2(r)\, r^{n-1}\,dr;$$

si deduce allora che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega |x|^{-2m-2\tau}\varphi^2(x)\,dx \leq N\int_\omega d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{n-1-2m-2\tau}\left(\int_\rho^{+\infty}(t-\rho)^{m-1}\frac{\partial^m\varphi}{\partial\rho^m}\,dt\right)^2 d\rho \leq$$

$$\leq N\int_\omega d\omega \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial^m\varphi}{\partial\rho^m}\right)^2 \rho^{-2\tau+n-1}\,d\rho,$$

ove ω è l'ipersuperficie sferica di raggio unitario e centro nell'origine e ρ indica la distanza dall'origine. Dalla relazione precedente si ricava l'asserto.

Benché non ci occorra per il seguito, osserviamo che sussiste il Lemma:

LEMMA 4.3. *La* (4.2) *sussiste anche se* $2\tau > n-2$.

Infatti se, invece della (4.3), si utilizza

$$K(r, s) \begin{cases} = (s-r)^{m-1}\, r^\tau s^\sigma & r < s \\ = 0 & r \geq s, \end{cases} \tag{4.4}$$

con $m+\tau+\sigma = 0$, supponendo $n-2 < 2\tau$ e scegliendo poi α tale che $n-\tau-1 < 2\alpha < \tau+1$, si ottiene ancora la (4.2).

Dal Lemma 4.2 si possono trarre degli esempi di equazioni per le quali è soddisfatta l'ipotesi (1.4) con $\theta = 1$.

(4) In proposito si veda J. Nečas [9], p. 300, Remarque 3.3 (enunciato senza dimostrazione), e R. Courant e D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», vol. I, p. 447 (1953).

Esempio I. Se si suppone $n > 2m$, e che la forma bilineare B soddisfi la condizione

$$(4.5) \qquad (-1)^m \mathrm{B}[\varphi, \varphi] \geq \mathrm{K} \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha \varphi)^2 \, \mathrm{d}x \,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \,,$$

con K indipendente dal diametro del supporto di φ, dal Lemma 4.2 discende che la B verifica la (1.4) con $\theta = 1$.

Supposte allora verificate le altre ipotesi del Teorema 2.1, esiste una soluzione $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{m,2\nu}(\bar{\Omega})$ delle (1.7) che verifica la condizione:

$$(4.6) \qquad \int_\Omega u^2 \, |x|^{-2m} \, \mathrm{d}x < +\infty \,.$$

Al fine di ottenere unicità nella stessa classe sarà sufficiente supporre (vedi il Teorema 3.2):

$$2m \leq 2m\gamma + \gamma\eta^* \,.$$

Osserviamo che la (4.5) è verificata dalle forme bilineari B a coefficienti costanti, contenenti solo la parte dominante, ed ellittiche in Ω, oppure se esiste un numero $q > 0$ per cui risulti

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \, \xi_\alpha \, \xi_\beta \geq q \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha^2 \,,$$

per ogni vettore reale di componenti ξ_α.

Esempio II. Consideriamo una forma bilineare B del tipo

$$(4.7) \qquad \mathrm{B}[\varphi, \varphi] = \mathrm{B}_0 [\varphi, \varphi] + (-1)^m \lambda \int_\Omega |x|^{-2m\tau} \varphi^2 \, \mathrm{d}x \,,$$

e supponiamo $n > 2m$; B_0 è una forma bilineare verificante le ipotesi fatte nel n. 1 relativamente a B, eccezion fatta per la (1.4).

Si ha allora che esiste un numero λ_0, dipendente dai massimi moduli degli $a_{\alpha\beta}$ e dai moduli di continuità degli $a_{\alpha\beta}$ con $|\alpha| = |\beta| = m$, tale che supposto $\lambda \geq \lambda_0$ e $2m\tau \leq 2m\gamma + \gamma\eta^*$ (vedi in proposito il n. 4 di [2] (5)), la forma bilineare B verifica la (4.5).

Supposto poi $\eta_{\alpha\beta} = \eta^*$ per $|\alpha| = |\beta| = 0$ e $2m\tau = 2m\gamma + \gamma\eta^*$, nelle ipotesi del Teorema 2.1, si ha esistenza per il problema (1.7) nella classe delle $u \in \mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{m,2\nu}(\bar{\Omega})$ per le quali è verificata la (4.6); poiché in tali condizioni sono verificate le ipotesi del Teorema 3.1, si ha anche unicità nella stessa classe.

Esempio III. Considerata ancora una forma bilineare del tipo (4.7), con $\tau > 1$ ed $n \leq 2m$, nell'ipotesi $\lambda \geq \lambda_0$ (con λ_0 del tipo specificato nell'esempio II) e $2m\tau \leq 2m\gamma + \gamma\eta^*$, si ha che è verificata la (1.4) con $\theta = \tau$.

(5) Si veda la bibliografia della Nota I; questi «Rendiconti», *52*, 132–140 (1972).

Supposte verificate le ipotesi del Teorema 2.1, che $\eta_{\alpha\beta} = \eta^*$ per $|\alpha| = |\beta| = 0$, e che $2m\tau = 2m\gamma + \gamma\eta^*$, si ha esistenza nella classe delle $u \in H^{m,2\nu}_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ che verificano la condizione

$$\int_\Omega |x|^{-2m\theta} u^2 \, dx < +\infty \; ; \tag{4.8}$$

in tale classe non è però verificata l'ipotesi del Teorema 3.1 per cui non si può asserire che vi è unicità.

Esempio IV. Consideriamo ora la (4.7) nel caso $\tau \leq 1$, senza fare alcuna ipotesi su n ed m. Si ha, nell'ipotesi che $\lambda \geq \lambda_0$ (con λ_0 del tipo specificato nell'esempio II) e $2m\tau \leq 2m\gamma + \gamma\eta^*$, che la (4.7) verifica la (1.4) con $\theta = \tau$.

Supposto ancora $\eta_{\alpha\beta} = \eta^*$ per $|\alpha| = |\beta| = 0$ e che $2m\tau = 2m\gamma + \gamma\eta^*$, supposte verificate le ipotesi del Teorema 2.1 si ha esistenza nella classe delle $u \in H^{m,2\nu}_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$, che soddisfano la condizione (4.8); in tale classe si ha anche unicità in quanto sono verificate le ipotesi del Teorema 3.1.

5. IL TEOREMA DELL'ALTERNATIVA

In questo numero consideriamo il problema:

$$\begin{cases} B'[\varphi, u] = F[\varphi, f], & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \dfrac{d^j u}{dn^j} = \psi_j \quad \text{su} \quad \partial\Omega, & 0 \leq j \leq m-1, \end{cases} \tag{5.1}$$

ove

$$B'[\varphi, \varphi] = \sum_{|\alpha|,|\beta|}^{0,m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega a'_{\alpha\beta} D^\alpha\varphi \, D^\beta\varphi \, dx \, .$$

Su B' supponiamo che siano verificate le ipotesi fatte su B nel n. 1, fatta eccezione per la (1.4). In particolare si abbia:

$$a'_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{\gamma(|\alpha|+|\beta|-2m)-\gamma\eta'_{\alpha\beta}}) \, , \qquad |\alpha| + |\beta| < 2m$$

con $0 \leq \gamma \leq 1$, $\eta'_{\alpha\beta} \geq 0$.

Si supponga ancora che f_α verifichi la (1.6) con un fissato $\theta \leq 1$, e che si abbia:

$$\gamma\eta'_{\alpha\beta} > \gamma\left(|\alpha| - 2m - \frac{n}{2}\right) + m\theta - \chi_\alpha \, . \tag{5.2}$$

Indicheremo poi con A_α la classe delle funzioni f_α, misurabili su Ω, per cui si ha la (1.6).

Consideriamo ora una forma bilineare B avente la stessa parte dominante di B' e che verifica tutte le ipotesi del n. 1 compresa la (1.4), con un θ

eguale a quello che interviene in (1.6). Si abbia ancora che i $\gamma\eta_{\alpha\beta}$ verifichino anch'essi la (5.2).

Considerato allora il problema:

$$
\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{B}[\varphi, u] = \mathrm{F}[\varphi, f], & & \forall\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \\ \dfrac{d^j u}{dn^j} = \psi_j, & \text{su } \partial\Omega, & 0 \leq j \leq m-1, \end{array}\right. \tag{5.3}
$$

e, supposte verificate le ipotesi del Teorema 3.2, si ha esistenza ed unicità per il problema (5.3) nella classe delle $u \in \mathrm{H}^{m,2\nu}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ con $\nu = \mu + \frac{n}{2} - 1$, e che verificano (2.3), (2.4) e (2.5).

Indicheremo tale classe con W.

Possiamo allora considerare l'applicazione, che chiameremo G, la quale ai dati $f_\alpha \in \mathrm{A}_\alpha$ e $\psi_j \in \mathrm{C}^{m-1-j,\mu}(\partial\Omega)$, del problema, associa l'unica $u \in \mathrm{W}$ che verifica il problema (5.3). Porremo $u = \mathrm{G}(f, \psi)$. Sia poi C lo spazio delle v derivabili fino all'ordine $m-1$ e per le quali si ha:

$$
\|v\|_c = \sum_{|\beta|}^{0,m-1} \sup_\Omega |\mathrm{D}^\beta v|\,|x|^{\xi_{|\beta|}} < +\infty
$$

con

$$
\xi_{|\beta|} = \gamma(|\alpha| + |\beta| - 2m) - \gamma\eta'_{\alpha\beta} - \chi_\alpha .
$$

Evidentemente se $v \in \mathrm{C}$ si ha

$$
g_\alpha = \sum_{|\beta|}^{0,m-1} (-1)^{|\alpha|}(a_{\alpha\beta} - a'_{\alpha\beta})\,\mathrm{D}^\beta v \in \mathrm{A}_\alpha, \qquad |\alpha| \leq m
$$

e quindi

$$
\zeta = \mathrm{G}(g, 0) \in \mathrm{C}.
$$

Infatti poiché $\zeta \in \mathrm{W}$ si avrà che

$$
\sum_{|\beta|}^{0,m-1} \sup_\Omega |x|^{\gamma\left(|\beta| + \frac{n}{2}\right) - m\theta} |\mathrm{D}^\beta \zeta| = \mathrm{O}(1) \tag{5.4}
$$

e quindi l'asserto in forza della (5.2).

Dimostriamo ora che G è una trasformazione completamente continua di C in sè; e cioè assegnata una successione $\{v_k\}$ di elementi di C is ha:

$$
\|v_k\|_{\mathrm{C}} \leq \mathrm{K} \Rightarrow \{\mathrm{G}(g_k, 0)\} \qquad \text{compatta in C.}
$$

Ricordiamo ora che, posto $\zeta_k = \mathrm{G}(g_k, 0)$, poiché $\zeta_k \in \mathrm{W}$, si ha che la (5.4) è soddisfatta per $\zeta = \zeta_k$ e inoltre

$$
\sup_\Omega |x|^{\gamma\left(m-1+\mu+\frac{n}{2}\right) - m\theta} \zeta_{k,m-1,\mu}(\Delta(x, \eta_\varepsilon)) = \mathrm{O}(1), \tag{5.5}
$$

ove con $\zeta_{k,m-1,\mu}(\mathrm{D})$ si indica il massimo dei coefficienti di Hölder su D, di esponente μ, delle derivate $(m-1)^{me}$ di ζ_k; notiamo che le costanti che intervengono nelle maggiorazioni (5.4) e (5.5) non dipendono da k.

In tali condizioni dalla $\{\zeta_k\}$ è possibile estrarne un'altra, che sarà indicata con gli stessi simboli, che converge uniformemente su ogni compatto contenuto in $\overline{\Omega}$, ad una funzione ζ_0, unitamente alle successioni $\{D^\alpha \zeta_k\}$ con $|\alpha| \leq m - 1$, che convergono uniformemente alle omologhe derivate di ζ_0. Tale ζ_0 appartiene a C e soddisfa la (5.4).

Posto ora

$$\gamma\left(|\beta| + \frac{n}{2}\right) - m\theta = \xi_{|\beta|} + \eta_{|\beta|}, \qquad (\eta_{|\beta|} > 0)$$

osserviamo che:

$$\|\zeta_0 - \zeta\|_C = \sum_{|\beta|}^{0,m-1} \sup_{\Omega} |D^\beta(\zeta_0 - \zeta_k)| \cdot |x|^{\xi_{|\beta|}}$$

$$\sum_{|\beta|}^{0,m-1} \sup_{\Omega} |D^\beta(\zeta_0 - \zeta_k)|\, |x|^{\xi_{|\beta|}+\eta_{|\beta|}} = O(1)$$

e dunque fissato un R qualsiasi

$$\|\zeta_0 - \zeta_k\|_C = \sum_{|\beta|}^{0,m-1} \sup_{\Omega_R} |D^\beta(\zeta_0 - \zeta)|\, |x|^{\xi_{|\beta|}} + K \sum_{|\beta|}^{0,m-1} \frac{1}{R^{\eta_{|\beta|}}}$$

per cui, fissato R sufficientemente grande in dipendenza di un ε prefissato, esiste un k_ε tale che per $k \geq k_\varepsilon$

$$|\zeta_0 - \zeta_k\| \leq \varepsilon \qquad \forall k \geq k_\varepsilon,$$

da cui la richiesta compattezza.

Considerata allora l'equazione

$$G(f, \psi) + G(g, 0) = v, \qquad v \in C \tag{5.6}$$

si ha che per tale equazione vale l'alternativa di Freedholm.

Osserviamo infine che una v che verifichi la (5.6) soddisfa le (5.1).

Possiamo dunque enunciare il Teorema:

TEOREMA 5.1. *Nelle ipotesi del Teorema 3.2, eccezion fatta per la condizione* A) *che non si suppone verificata dalla* B′, *per il problema* (5.1) *vale l'alternativa di Freedholm nella classe* W.

6. SOLUZIONI A COMPORTAMENTO POLINOMIALE

Dai risultati stabiliti nei n. 2 e n. 3 è immediato far discendere, in opportune ipotesi, l'esistenza e l'unicità per soluzioni delle (1.7) aventi all'infinito un assegnato comportamento polinomiale e cioè soluzioni tali che, assegnato un polinomio P di grado $k \leq m - 1$, soddisfano alle condizioni

$$D^\alpha(u - P) = o(1), \qquad |\alpha| \leq m - 1, \tag{6.1}$$

oppure ad una condizione del tipo

$$(6.2)\qquad \int_{\Omega} |x|^{-2\rho'} (u - \mathrm{P})^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \quad , \quad 2\rho' = \min\{2m, 2m\gamma + \gamma\eta^*\}.$$

Assegnato dunque un polinomio P di grado $k \leq m - 1$, supponiamo che

$$\sum_{0 \leq |\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} \, \mathrm{D}^{\beta} \, \mathrm{P} = \mathrm{O}(|x|^{\chi_\alpha}),$$

ciò che si verifica se si ha

$$(6.3)\qquad \gamma(|\alpha| + |\beta| - 2m) - \eta_{\alpha\beta}\gamma + k - |\beta| \leq \chi_\alpha, \qquad |\beta| \leq k.$$

Consideriamo allora il seguente problema:

$$(6.4)\qquad \begin{cases} \mathrm{B}[\varphi, v] = \mathrm{F}[\varphi, f] - \mathrm{B}[\varphi, \mathrm{P}], & \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \\ \dfrac{\mathrm{d}^j v}{\mathrm{d}n^j} = \psi_j - \dfrac{\mathrm{d}^j \mathrm{P}}{\mathrm{d}n^j}, \quad \text{su } \partial\Omega, & 0 \leq j \leq m - 1. \end{cases}$$

Supposte verificate le ipotesi del Teorema 3.2 si ha che esiste una unica $v \in \mathrm{H}^{m,2\nu}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ soddisfacente il problema (6.4) e verificante (2.3), (2.4) e (2.5).

Se poi $2m\theta < \gamma n$ tale v è infinitesima all'infinito insieme alle sue derivate fino all'ordine $m - 1$. Allora la funzione $u = v + \mathrm{P}$ è una soluzione delle (1.7) avente all'infinito l'assegnato comportamento polinomiale.

Possiamo perciò enunciare il Teorema:

TEOREMA 6.1. *Supposto che siano verificate le ipotesi del Teorema 3.2 e la* (6.3), *assegnato il polinomio* P *di grado* $k \leq m - 1$, *esiste una unica soluzione delle* (1.7) *avente all'infinito il comportamento polinomiale* P *e tale che* $u - \mathrm{P}$ *verifichi la condizione* (6.2).

Se poi $2m\theta < \gamma n$, *tale soluzione soddisfa anche alla* (6.1).

Evidentemente se per B viene a mancare l'ipotesi (1.4), nella stessa classe in cui si aveva esistenza ed unicità si ha l'alternativa (vedi il paragrafo precedente).

Osserviamo infine che l'ipotesi $2m\theta < \gamma n$ è certamente verificata se $n > 2m$ e $\dfrac{2m\theta}{n} < \gamma \leq 1$ e ciò si verifica nell'ipotesi $n > 2m$, se la forma B verifica una condizione del tipo (4.5), nel qual caso la (1.4) sarà verificata con $\theta = 1$ (vedi Esempio I e II).

BIBLIOGRAFIA

[8] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD e G. POLYA, *Inequalities*. Cambridge at the University Press (1957).

[9] J. NEČAS, *Les Méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson Editeur, Paris (1967).