
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANNA STEFANI

Su un Teorema di Nevanlinna

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.3, p. 271–276.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_3_271_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'II marzo 1972

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Su un Teorema di Nevanlinna.* Nota di GIANNA STEFANI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A number of results are given, extending — in the form of Carlson and Griffiths — an extension of R. Nevanlinna of a classical Picard Theorem.

1. — Il classico Teorema di Picard sulle trascendenti intere si può enunciare così: Sia $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}_1$ un'applicazione olomorfa della retta numerica complessa nella retta proiettiva complessa; se $f(\mathbf{C})$ omette almeno tre punti di $\mathbf{P}_1$ allora f è costante; ovvero, f è costante se la prima classe di Chern $c_1(D)$ del divisore D omesso da f è maggiore dell'opposto della prima classe di Chern $c_1(K)$ del fibrato canonico K di $\mathbf{P}_1$.

Sotto questa forma, il Teorema di Picard è stato esteso [2] ad applicazioni olomorfe $f: \mathbf{C}^n \rightarrow V$ dello spazio numerico complesso $\mathbf{C}^n$ in una varietà algebrica V proiettiva compatta non singolare, di dimensione complessa n .

Ad esempio, in [2] J. Carlson e P. Griffiths hanno dimostrato che, se f è non degenera (ossia se lo jacobiano di f non è ovunque nullo) ed $L \rightarrow V$ è un fibrato lineare olomorfo su V per cui $c_1(L) > c_1(-K)$, allora $f(\mathbf{C}^n)$ incontra ogni sezione olomorfa di L dotata di soli attraversamenti normali.

In [1] Nevanlinna ha dato, fra l'altro, una diversa estensione del Teorema di Picard, riguardante funzioni meromorfe sul disco $\{|z| < 1\}$ e soddisfacenti una certa condizione di crescita per $|z| \rightarrow 1$.

In questa Nota ci proponiamo di estendere, nella forma di J. Carlson e P. Griffiths, questo risultato di Nevanlinna ad applicazioni olomorfe $f: B \rightarrow V$ di una sfera $B = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \|z\| < 1\}$ in una varietà algebrica V

(*) Nella seduta dell'II marzo 1972.

soddisfacente le ipotesi prima specificate. Le tecniche usate sono quelle ormai usuali in queste questioni.

Usando un'opportuna famiglia esaustiva di compatti di B , $B[r]$ ($r \geq 1$), si definisce una funzione ordine $T(L, r)$ ($r \geq 1$) tale che l'ordine di crescita di T per $r \rightarrow \infty$ dà informazioni sulla misura dell'immagine di B mediante f . Ad esempio, se $V = \mathbf{P}_n$ spazio proiettivo complesso di dimensione n , si ottiene la seguente generalizzazione del Teorema di Nevanlinna:

Condizione sufficiente affinché $f(B)$ incontri almeno uno di $n+2$ iperpiani in posizione generica è che
$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{T(L, r)} \leq a < \frac{1}{2n}.$$

Le dimostrazioni complete dei risultati qui enunciati troveranno posto in un lavoro di prossima pubblicazione. Ringrazio il prof. P. A. Griffiths che mi ha suggerito l'argomento di questa Nota ⁽¹⁾.

2. - a) Raccogliamo alcune notazioni che verranno spesso usate nel seguito:

$$\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \quad \text{per ogni } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n,$$

$$B = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \|z\| < 1\},$$

$$B[t] = \left\{ z \in B \mid \|z\| \leq \frac{t-1}{t} \right\} \quad t \geq 1,$$

$$\varphi = dd^c \|z\|^2 = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

$$\varphi_k = \underbrace{\varphi \wedge \dots \wedge \varphi}_{k \text{ volte}} \quad ; \quad \varphi_n = \Phi,$$

$$\psi = dd^c \log \|z\|^2,$$

$$\psi_k = \underbrace{\psi \wedge \dots \wedge \psi}_{k \text{ volte}},$$

$$\sigma = d^c \log \|z\|^2 \wedge \psi_{n-1}.$$

Si noti che $\psi_n = 0$, $d\sigma = 0$ e $\int_{\partial B[t]} \sigma = 1$ per ogni $t > 1$.

Considereremo funzioni olomorfe $f: B \rightarrow V$ con V varietà algebrica proiettiva compatta, non singolare di dimensione complessa n ($= \dim_{\mathbf{C}} B$). Se φ è una funzione, una forma differenziale o un insieme di V , con φ_j indicheremo l'immagine inversa di φ mediante f .

(1) Lavoro eseguito mentre l'Autore usufruiva di una borsa di studio del C.N.R.

b) Siano $f: B \rightarrow V$ un'applicazione olomorfa come in a); $M \rightarrow V$ un fibrato lineare olomorfo su V e ω una forma di tipo $(1, 1)$ che rappresenti la prima classe di Chern $c_1(M)$ di M . Poniamo la seguente:

DEFINIZIONE. Si dice funzione ordine la funzione:

$$(I) \quad T(M, r) = \int_1^r \left(\int_{B[t]} \omega_f \wedge \varphi_{n-1} \right) \frac{t^{2n-3}}{(t-1)^{2n-1}} dt.$$

Si provano facilmente i due Lemmi:

LEMMA 1. Sia α una 1-forma definita in B, C^∞ ; allora

$$\int_{\partial B[t]} \alpha \wedge \psi_{n-1} = \frac{t^{2n-2}}{(t-1)^{2n-2}} \int_{\partial B[t]} \alpha \wedge \varphi_{n-1}.$$

LEMMA 2. Sia η una funzione C^∞ in B ; allora

$$\int_{\partial B[t]} d^c \eta \wedge \psi_{n-1} = \frac{1}{2} t(t-1) \frac{d}{dt} \int_{\partial B[t]} \eta \sigma.$$

Da questi Lemmi segue che la funzione ordine dipende solo dal fibrato M , a meno di una funzione limitata.

OSSERVAZIONE. Se $V = \mathbf{P}_1$, la funzione ordine di Nevanlinna si ottiene dalla nostra con la sostituzione $t = 1/(1 - \rho)$.

c) Sia come sopra $M \rightarrow V$ un fibrato lineare olomorfo su V , sia D una sua sezione olomorfa le cui singolarità siano al più attraversamenti normali e sia $K \rightarrow V$ il fibrato canonico di V .

In [2] è provato che, se $c_1(M) + c_1(K) > 0$, su $V - D$ esiste una forma volume, Ψ , cioè una sezione C^∞ di $K \otimes \bar{K}$ positiva fuori di un insieme analitico e tale che, indicando con $\text{Ric } \Psi$ la forma di Ricci di Ψ , si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} a) & \text{Ric } \Psi > 0, \\ b) & \Psi \leq (\text{Ric } \Psi)^n, \\ c) & \int_{V-D} (\text{Ric } \Psi)^n < \infty. \end{cases}$$

Se Ω è una forma volume C^∞ su V , tale che $\text{Ric } \Omega = c_1(K)$, la forma Ψ si definisce così:

Sia $\delta \in \Gamma(V, M)$ una sezione che definisce D , cosicchè $-dd^c \log |\delta|^2 \in c_1(M)$. Moltiplicando δ per una costante opportuna si può supporre $|\delta| < \epsilon$, ϵ positivo arbitrario. La forma Ψ soddisfacente le (2) è allora data da

$$(3) \quad \Psi := \frac{\Omega}{(\log |\delta^2|)^2 |\delta|^2}.$$

Poiché f è applicazione olomorfa, conserva il bigrado delle forme differenziali e quindi $\Psi_f = \xi \Phi$, con $\xi (\geq 0)$ funzione C^∞ su $B - D_f$. Indicando con R il luogo degli zeri di Ψ si può supporre che R_f e D_f non passino per l'origine.

Considerando $R_f, D_f, \text{Ric } \Psi_f$ e $dd^c \log \xi$ come correnti, vale la relazione:

$$(4) \quad dd^c \log \xi = R_f - D_f + \text{Ric } \Psi_f.$$

Applicando questa alla forma ψ_{n-1} , tenuto conto dei Lemmi 1 e 2 ed integrando rispetto a $dt/[t(t-1)]$, si ottiene

$$(5) \quad \frac{1}{2} \int_{\partial B[r]} \log \xi \cdot \sigma = \int_1^r \left(\int_{R_f[t]} \psi_{n-1} \right) \frac{dt}{t(t-1)} - \int_1^r \left(\int_{D_f[t]} \psi_{n-1} \right) \frac{dt}{t(t-1)} + \\ + \int_1^r \left(\int_{B[t]} \text{Ric } \Psi_f \wedge \varphi_{n-1} \right) \frac{t^{2n-3}}{(t-1)^{2n-1}} dt + c,$$

con c costante. Posto:

$$\mu(r) = \frac{1}{2} \int_{\partial B[r]} \log \xi \cdot \sigma,$$

$$N_1(r) = \int_1^r \left(\int_{R_f[t]} \psi_{n-1} \right) \frac{dt}{t(t-1)},$$

$$N(D, r) = \int_1^r \left(\int_{D_f[t]} \psi_{n-1} \right) \frac{dt}{t(t-1)},$$

$$T_1(r) = \int_1^r \left(\int_{B[t]} \text{Ric } \Psi_f \wedge \varphi_{n-1} \right) \frac{t^{2n-3}}{(t-1)^{2n-1}} dt,$$

la (5) si scrive:

$$(6) \quad T_1(D, r) + N_1(r) = \mu(r) + N(D, r) + c.$$

Per la concavità della funzione logaritmo

$$(7) \quad \mu(r) \leq \frac{n}{2} \log \left(\int_{\partial B[r]} \xi^{1/n} \cdot \sigma \right),$$

si provano poi le:

$$(8) \quad \int_{\partial B[r]} \xi^{1/n} \cdot \sigma = \frac{1}{2} \frac{r^{2n+1}}{(r-1)^{2n-1}} \frac{d}{dr} \int_{B[r]} \xi^{1/n} \Phi,$$

$$(9) \quad \int_{B[r]} \xi^{1/n} \Phi \leq \frac{(r-1)^{2n-1}}{r^{2n-3}} \frac{dT_1(r)}{dr}.$$

Da queste, con passaggi che omettiamo, si ha che, qualunque sia $\varepsilon > 0$,

$$(10) \quad T_1 + N_1 \leq N + 2n \log r + n(1 + \varepsilon) \log T_1 + c'$$

fuori di un insieme I per cui $\int_I dr < \infty$. Poiché $N_1 \geq 0$ dalla (10) segue poi:

$$(11) \quad 1 \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{N}{T_1} + 2n \frac{\log r}{T_1} + \frac{\log T_1}{T_1} + \frac{c'}{T_1} \right].$$

3. — Sia $L \rightarrow V$ un fibrato lineare olomorfo di V e sia D un divisore effettivo definito dalla sezione δ di L .

Supponendo, come è lecito, $|\delta| < 1$, si definisce:

$$(12) \quad m(D, r) = \int_{\partial B[r]} \log \frac{1}{|\delta_f|^2} \geq 0.$$

Se la sezione δ non ha zeri $m(D, r)$ è una funzione limitata.

Con le notazioni dei numeri precedenti, avremo ancora

$$(13) \quad N(D, r) + m(D, r) = T(L, r) + c.$$

In analogia con la definizione di Nevanlinna e quella di [2], si definisce il « difetto » del divisore D con la

$$(14) \quad \delta(D) := 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(D, r)}{T(L, r)}.$$

Poiché $N(D, r) \leq T(L, r)$, per $\delta(D)$ valgono le limitazioni $0 \leq \delta(D) \leq 1$ ed inoltre $\delta(D) = 1$ se $\{D\} \cap \{f(B)\} = \emptyset$.

Siano ora $D_1, \dots, D_k$ divisori del sistema lineare $|L|$ tali che $D = \sum_{j=1}^k D_j \in |kL|$ abbia come singolarità soltanto attraversamenti normali, e sia $k\ell_1(L) + c_1(K) > 0$. Dalla

$$(15) \quad [kT(L, r) + T(K, r)] - 2 \log(kT(L, r) + c) \leq T_1(r) \leq kT(L, r) + T(K, r),$$

tenendo conto della (11), segue immediatamente il

TEOREMA 1. *Sia $f: B \rightarrow V$ olomorfa, $M \rightarrow V$ un fibrato lineare olomorfo tale che $c_1(M) + c_1(K) > 0$. Se la funzione ordine è tale che*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{T(M, r) + T(K, r) - 2 \log T(M)} \leq a < \frac{1}{2n},$$

ogni divisore, con soli attraversamenti normali, sezione olomorfa di M ha intersezione non vuota con $f(B)$.

Se $V = \mathbf{P}_n$ ed L è il fibrato delle sezioni iperpiane di B , la condizione $kc_1(L) + c_1(K) > 0$ è soddisfatta per $k \geq n + 2$ e dal Teorema 1 segue il

COROLLARIO. Sia $f: B \rightarrow \mathbf{P}_n$ un'applicazione olomorfa. Se $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{T(L, r)} \leq a < \frac{1}{2n}$, allora $f(B)$ incontra almeno uno di $n + 2$ iperpiani in posizione generale.

Si osservi che per $n = 1$ la condizione che qui interviene è meno forte di quella di Nevanlinna.

4. - Dalle considerazioni precedenti, mediante un procedimento analogo a quello di J. Carlson e P. Griffiths, si ottiene il seguente *Teorema di difetto* per le applicazioni olomorfe $f: B \rightarrow V$ non degeneri.

TEOREMA 2. Siano $V, f: B \rightarrow V$, ed $L \rightarrow V$ come sopra; siano $D_1, \dots, D_k$ divisori olomorfi di L tali che $D = \sum_{j=1}^k D_j \in |L^k|$ abbia come singolarità solo attraversamenti normali. Allora se

$$a) \quad kc_1(L) + c_1(K) > 0,$$

$$b) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{kT(L, r) + T(K, r) - \log T(L, r)} = 0,$$

risulta $\sum_{j=1}^k \delta(D_j) \leq l$ per ogni l per cui $lc_1(L) + c_1(K) \geq 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. NEVANLINNA, *Théorème de Picard-Borel e la Theorie des fonctions Meromorphes*, Paris, Gautier-Villars 1929.
- [2] J. CARLSON e P. GRIFFITHS, *A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties* (di prossima pubblicazione).
- [3] J. CARLSON, *Some degeneracy theorems for entire functions with values in algebraic variety*, Thesis at Princeton, April 1971.
- [4] M. GREEN, *Holomorphic maps into $\mathbf{P}_n$ omitting hyperplanes* (Di prossima pubblicazione).
- [5] P. GRIFFITHS, *Holomorphic mappings into canonical algebraic varieties*, «Annals of Mathematics», 93 (1971).
- [6] W. STOLL, *Value distribution of holomorphic maps into compact complex manifolds*, Lecture notes in «Mathematics», 135, Springer (New York 1970).