Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tullio Valent

Una decomposìzioue di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 182–186.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_182_0>

Meccanica. — *Una decomposizioue di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica* (*). Nota di TULLIO VALENT, presentata (**) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — Let μ be a measure on R^n and let X be a bounded measurable subset of finite measure of R^n.

We denote by $L^2_{R^n}(X, \mu)$ the Hilbert space of all R^n–valued functions square-integrable on X with respect to μ, where the scalar product is defined as the integral over X of the ordinary product of two vectors.

We show that $L^2_{R^n}(X, \mu)$ is the topological direct sum of two ortogonal subspaces, which have an evident mechanical meaning for $n = 3$.

We show then some consequences and applications of the preceding result.

Si considera lo spazio vettoriale su R, $L^2_{R^n}(X, \mu)$, delle funzioni (vettoriali) a valori in R^n e di quadrato sommabile, rispetto ad una (arbitraria) misura μ, in un (arbitrario) insieme X limitato misurabile di misura finita di R^n, atteggiato a spazio di Hilbert definendo il prodotto scalare come l'integrale del prodotto scalare ordinario di due vettori.

Nella prima parte della presente Nota si mostra come questo spazio di Hilbert sia somma diretta topologica di due sottospazi ortogonali i quali intervengono in questioni connesse con l'integrazione di sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali del tipo dell'Elasticità e, nel caso $n = 3$, hanno un evidente significato meccanico.

Successivamente si dimostra una proprietà analoga per dei particolari sottospazi di $L^2_{R^n}(X, \mu)$, indicandone una possibile significativa applicazione.

1. Sia μ una misura nel reale euclideo n–dimensionale e X un insieme limitato misurabile di misura finita di R^n.

Sia $\boldsymbol{x} = (x_i)$ il punto generico di X.

Consideriamo lo spazio, chiaramente hilbertiano, $L^2_{R^n}(X, \mu)$, delle funzioni vettoriali $\boldsymbol{u} = (u_i)$ a valori in R^n di quadrato sommabile rispetto a μ in X, con il prodotto scalare definito da

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_X u_i v_i \, d\mu \quad ; \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^2_{R^n}(X, \mu) \text{ (1)}.$$

La norma dell'elemento $\boldsymbol{u} \in L^2_{R^n}(X, \mu)$, è quindi

$$\|\boldsymbol{u}\| = \left[\int_X \boldsymbol{u}^2 \, d\mu\right]^{1/2}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

(1) È sott'intesa la sommatoria da 1 a n per ogni indice ripetuto.

Indichiamo con $\mathfrak{R}$ il sottospazio di $L^2_{R^n}(X, \mu)$ costituito dei vettori ϱ definiti, per ogni $\boldsymbol{x} \in X$, nel modo seguente:

$$\varrho(x) = \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x},$$

ove $\boldsymbol{a}$ è un arbitrario vettore costante e $B = (B_{ij})$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ una arbitraria matrice numerica di ordine n emisimmetrica; diciamo che tali vettori sono *del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi*.

Con $\mathcal{E}(X, \mu)$ denotiamo l'insieme dei vettori $\boldsymbol{e} = (e_i)$ definiti in X e a valori in R^n tali che

$$\int_X e_i \, d\mu = 0 \quad , \quad \int_X (e_i x_j - e_j x_i) \, d\mu = 0; \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n; \tag{1}$$

poniamo quindi $\mathcal{E}^{(L^2)} = \mathcal{E}(X, \mu) \cap L^2_{R^n}(X, \mu)$.

Diciamo che $\mathcal{E}(X, \mu)$ è l'insieme dei *vettori* (a valori in R^n) *equilibrati in* X *rispetto alla misura* μ.

La ragione per cui usiamo tale terminologia è che, per $n = 3$, i vettori ϱ e i vettori $\boldsymbol{e}$ si usano chiamare proprio così [(2)].

LEMMA 1. $\mathcal{E}^{(L^2)}$ *è un sottospazio lineare chiuso di* $L^2_{R^n}(X, \mu)$.

Questo Lemma è conseguenza del fatto che R è, palesemente, un sottospazio lineare di dimensione finita di $L^2_{R^n}(X, \mu)$; è noto, infatti, che, in uno spazio normato, ogni sottospazio lineare di dimensione finita è chiuso.

LEMMA 2. $\mathcal{E}^{(L^2)}$ *è il complemento ortogonale di* $\mathfrak{R}$ *in* $L^2_{R^n}(X, \mu)$, cioè $\mathcal{E}^{(L^2)}$ coincide con l'insieme dei vettori di $L^2_{R^n}(X, \mu)$ ortogonali a $\mathfrak{R}$.

Osserviamo innanzitutto che $\mathfrak{R}$ ed $\mathcal{E}^{(L^2)}$ sono (tra loro) ortogonali: infatti, presi $\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}$ ed $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}^{(L^2)}$, si ha, per l'emisimmetria di B,

$$(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = \int_X a_i e_i \, d\mu + \int_X B_{ij} x_j e_i \, d\mu =$$

$$= a_i \int_X e_i \, d\mu + B_{ij} \int_X \frac{e_i x_j - e_j x_i}{2} \, d\mu,$$

d'onde $(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = 0$, in base alle (1).

Dopodiché, per provare il Lemma 2, basta verificare che ogni $\boldsymbol{u}$ di $L^2_{R^n}(X, \mu)$ orotogonale a $\mathfrak{R}$ appartiene a $\mathcal{E}^{(L^2)}$.

Sia allora $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}$. Ne segue

$$a_i \int_X u_i \, d\mu = 0$$

(2) Cfr. T. VALENT, *Qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati. Possibili applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*, « Rend. Sem. Mat. », Padova 1967.

qualunque siano le costanti a_i, nonché

$$B_{ij} \int_X \frac{u_i x_j - u_j x_i}{2} \, d\mu = 0$$

qualunque siano le costanti B_{ij}.

Di conseguenza risulta

$$\int_X u_i \, d\mu = 0 \quad , \quad \int_X \frac{u_i x_j - u_j x_i}{2} \, d\mu = 0$$

dunque $\boldsymbol{u} \in \mathcal{E}^{(L^2)}$.

Conseguenza dei Lemmi 1 e 2 è il seguente

TEOREMA 1. $L^2_{R^n}(X, \mu)$ *è somma diretta topologica dei due suoi sottospazi ortogonali* $\mathfrak{R}$ *ed* $\mathcal{E}^{(L^2)}$: $L^2_{R^n}(X, \mu) = \mathfrak{R} \oplus \mathcal{E}^{(L^2)}$.

Per il Teorema appena dimostrato, ogni vettore $\boldsymbol{u} \in L^2_{R^n}(X, \mu)$ si scrive in uno ed un solo modo come somma di un vettore $\varrho_{\boldsymbol{u}} \in \mathfrak{R}$ e di un vettore $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{E}^{(L^2)}$:

$$\boldsymbol{u} = \varrho_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}; \tag{2}$$

inoltre risulta

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \|\varrho_{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}\|^2, \tag{3}$$

essendo $\varrho_{\boldsymbol{u}}$ ed $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$ tra loro ortogonali. Diciamo che $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$ *è la parte equilibrata di* $\boldsymbol{u}$.

Ne segue che *tra tutti i vettori* ϱ *di* $\mathfrak{R}$, $\varrho_{\boldsymbol{u}}$ *è quello che ha distanza minima da* $\boldsymbol{u}$ (cioè quello che rende minimo

$$\int_X (\boldsymbol{u} - \varrho)^2 \, d\mu)$$

e *tra tutti i vettori di* $\mathcal{E}^{(L^2)}$, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$ *è quello che ha distanza minima da* $\boldsymbol{u}$ (3); in altri termini $\varrho_{\boldsymbol{u}}$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}$ su $\mathfrak{R}$ ed $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}$ su $\mathcal{E}^{(L^2)}$.

(3) Dal (2) e dal fatto che $\mathfrak{R}$ è ortogonale a $\mathcal{E}^{(L^2)}$ si ha infatti

$$\|\boldsymbol{u} - \varrho\|^2 = \|\varrho_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}} - \varrho\|^2 = \|\varrho_{\boldsymbol{u}} - \varrho\|^2 + \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}\|^2$$

qualunque sia $\varrho \in \mathfrak{R}$, nonché

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\|^2 = \|\varrho_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{e}\|^2 = \|\varrho_{\boldsymbol{u}}\|^2 + \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{e}\|^2$$

qualunque sia $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}^{(L^2)}$, d'onde

$$\inf_{\varrho \in \mathfrak{R}} \|\boldsymbol{u} - \varrho\| = \|\boldsymbol{u} - \varrho_{\boldsymbol{u}}\|,$$

$$\inf_{\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}^{(L^2)}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}\| = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}\|.$$

Lo spazio quoziente

$$L^2_{R^n}(X, \mu)/\mathfrak{R}$$

è identificabile, algebricamente e topologicamente, con $\mathcal{E}^{(L^2)}$: infatti, detto $[\boldsymbol{u}]$ l'elemento di $L^2_{R^n}(X, \mu)/\mathfrak{R}$ individuato da $\boldsymbol{u}$, l'applicazione $[\boldsymbol{u}] \to \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$, ove $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}$ è la parte equilibrata di $\boldsymbol{u}$, è un isomorfismo di $L^2_{R^n}(X, \mu)/\mathfrak{R}$ su $\mathcal{E}^{(L^2)}$ e inoltre risulta

$$\|[\boldsymbol{u}]\| = \inf_{\varrho \in \mathfrak{R}} \|\boldsymbol{u} + \varrho\| = \|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{u}}\|.$$

2. Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore definito in X e a valori in R^n tale che $\boldsymbol{v}^2 = 1$ quasi ovunque in X ($\boldsymbol{v}$ appartiene senz'altro a $L^2_{R^n}(X, \mu)$) e consideriamo il sottospazio $P_{\boldsymbol{v}}$ di $L^2_{R^n}(X, \mu)$ così definito:

$$P_{\boldsymbol{v}} = \{q\boldsymbol{v} : q \in L^2_R(X, \mu)\}.$$

È immediato verificare che $P_{\boldsymbol{v}}$ è un sottospazio completo di $L^2_{R^n}(X, \mu)$: basta tener presente che la norma di $q\boldsymbol{v}$ in $L^2_{R^n}(X, \mu)$ è uguale alla norma di q in $L^2_R(X, \mu)$.

Indichiamo con $\mathcal{E}^{(L^2)}_{\boldsymbol{v}}$ l'insieme dei vettori equilibrati su X (rispetto alla misura μ) che appartengono a $P_{\boldsymbol{v}}$ e con $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}}$ l'insieme dei vettori (di $P_{\boldsymbol{v}}$) del tipo $\rho_i \nu_i \boldsymbol{v}$ con $\varrho = (\rho_i) \in \mathfrak{R}$:

$$\mathcal{E}^{(L^2)}_{\boldsymbol{v}} = \{q\boldsymbol{v} : q\boldsymbol{v} \in \mathcal{E}^{(L^2)}\}$$

$$\mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}} = \{\rho_i \nu_i \boldsymbol{v} : \varrho \in \mathfrak{R}\}.$$

$\mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}}$ è un sottospazio lineare di $P_{\boldsymbol{v}}$ di dimensione finita, epperò è chiuso in $P_{\boldsymbol{v}}$.

Il complemento ortogonale di $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}}$ in $P_{\boldsymbol{v}}$ è $\mathcal{E}^{(L^2)}_{\boldsymbol{v}}$: per convincersene si osservi che

$$(\rho_i \nu_i \boldsymbol{v}, q\boldsymbol{v}) = (\varrho, q\boldsymbol{v})$$

e si ricordi il Lemma 2.

Di conseguenza sussiste il

TEOREMA 2. $P_{\boldsymbol{v}}$ *è somma diretta topologica dei suoi sottospazi ortogonali* $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}}$ e $\mathcal{E}^{(L^2)}_{\boldsymbol{v}}$: $P_{\boldsymbol{v}} = \mathfrak{R}_{\boldsymbol{v}} \oplus \mathcal{E}^{(L^2)}_{\boldsymbol{v}}$.

Voglio, infine, indicare un'applicazione del Teorema 2 avente un chiaro significato meccanico, la quale mi sarà utile in un successivo lavoro.

Sia Σ una superficie di R^3 limitata, di area finita (secondo Lebesgue), che ammette quasi ovunque (cioè tranne in un sottoinsieme di Σ di misura superficiale nulla) il piano tangente.

Il Teorema 2 sussiste – evidentemente – se si identificano X con Σ, μ con una misura che induce su Σ la misura superficiale di Lebesgue e $\boldsymbol{v}$ con il versore $\mathbf{N}$ della normale orientata a Σ.

Di conseguenza si ha, tra l'altro, che *se un vettore* $\boldsymbol{u}$ *a valori in* R^3 *definito su* Σ *e ivi di quadrato sommabile* (rispetto alla misura superficiale di Lebesgue) *verifica la*

$$\int_{\Sigma} q N_i \, u_i \, d\Sigma = 0$$

in corrispondenza di ogni vettore $q\mathbf{N}$ *equilibrato su* Σ *e ivi di quadrato sommabile, allora esiste un vettore* $\boldsymbol{\rho}$ *del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi tale da aversi*

$$u_i \, N_i = \rho_i \, N_i$$

quasi ovunque su Σ.