Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Susana Elena Trione

Generalizzazione di una formola del Källen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.2, p. 115–119.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_2_115_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 febbraio 1972

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Generalizzazione di una formola del Källen.* Nota di SUSANA ELENA TRIONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let n and k be fixed integers; n even ≥ 4; $1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$. Let $f(t)$, $0 \leq t < \infty$, be differentiable and such that $\int_0^\infty |f(t)|\, t^{(n-2k)/2}\, dt < \infty$. We prove that, under these conditions, *the integral equation* (2) *admits the solution* (4). In the particular case $n = 4$, $k = 1$ (which is important in the quantum theory of fields) the reciprocal formulae (2) and (4) have already been obtained (on the basis of heuristical considerations) by Källen [1].

1) Siano

n un intero fisso, pari, ≥ 4;

k un intero fisso, $1 \leq k \leq (n-2)/2$;

s, t numeri reali soddisfacenti alle $0 \leq s, t < \infty$.

Porremo

$$R_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_m(x)}{x^m},$$

ove $J_m(x)$ denota la ben nota funzione di Bessel d'ordine m:

$$J_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Con $\delta^{[\mu]}$ designeremo, come di consueto, la derivata d'ordine μ della misura di Dirac.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

Porremo inoltre

$$(1)\qquad \bar{\Delta}(s\,,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{[(n-2k)/2]-1}\, t^{[(n-2k)/2]-1}}{2^{n-2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)} \sum_{\mu=0}^{[(n-2k)/2]-1} (-1)^{\mu} \frac{2^{2\mu}\, t^{-\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-\mu-1\right)!}\,\delta^{[\mu]}(s) +$$

$$+ \frac{(-1)^{(n-2k)/2}\, t^{(n-2k)/2}}{2^{(2k+n)/2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\, \mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\,.$$

Consideriamo l'equazione integrale

$$(2)\qquad h(s) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(s\,,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Scopo di questa Nota è la dimostrazione del seguente

TEOREMA. – *Sia $f(t)$ derivabile in $[0\,,\infty)$, tale che*

$$(3)\qquad \int_0^{\infty} |f(t)|\, t^{(n-2k)/2}\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Sotto queste ipotesi sussiste la formola reciproca

$$(4)\qquad f(t) = 2^{2k+n-2}\,\pi^{n-2}\,\{\Gamma(k)\}^2 \int_0^{\infty} h(s)\,\bar{\Delta}(t\,,s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dimostrazione del Teorema. – Porremo

$$c_{\mu,n,k} = \int_0^{\infty} f(t)\, t^{[(n-2k-2)/2]-\mu}\,\mathrm{d}t\,.$$

Allora la (2) può scriversi

$$(5)\qquad h(s) = \frac{(-1)^{[(n-2k)/2]-1}}{2^{n-2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)} \sum_{\mu=0}^{[(n-2k)/2]-1} (-1)^{\mu} \frac{c_{\mu,n,k}\, 2^{2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-1-\mu\right)!}\,\delta^{[\mu]}(s) +$$

$$+ \frac{(-1)^{(n-2k)/2}}{2^{(2k+n-2)/2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\, \mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{f(t)\}\,,$$

dove col simbolo $\mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{f(t)\}$ denotiamo la trasformata di Hankel d'ordine $(n-2k)/2$ della funzione $f(t)$ (scritta in una forma un po' diversa dall'usuale):

$$(6)\qquad \mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{f(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(t)\, t^{(n-2k)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\,\mathrm{d}t =$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle f(t)\, t^{(n-2k)/2}\,,\ \frac{1}{2}\,\mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\right\rangle.$$

Osserviamo che la definizione (6) ha anche senso per certe distribuzioni, per esempio per la δ e le sue derivate, onde porremo

$$(7)\qquad \mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{\delta^{[\mu]}\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \delta^{[\mu]}\, t^{(n-2k)/2}\,,\ \frac{1}{2}\,\mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\right\rangle.$$

Da questa definizione risulta [cfr. la (16)] che per $\mu < \frac{n-2k}{2}$ vale la

(8) $$\mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{\delta^{[\mu]}\} = 0 .$$

Osserviamo che dalla (6) si ricava la classica formola d'inversione di Hankel

(9) $$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\, s^{(n-2k)/2}\, \mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\, \mathrm{d}s .$$

Se si applica ai due membri della (5) la trasformazione di Hankel, si ottiene, tenendo conto delle (6), (8),

(10) $$f(t) = 2^{2k+n-2}\,\pi^{n-2}\{\Gamma(k)\}^2\int_0^\infty h(s)\,\frac{(-1)^{(n-2k)/2}\, s^{(n-2k)/2}}{2^{(2k+n)/2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\,\mathrm{R}_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\,\mathrm{d}s ;$$

ossia, equivalentemente,

(11) $$f(t) = 2^{2k+n-2}\,\pi^{n-2}\{\Gamma(k)\}^2\int_0^\infty h(s)\,\overline{\Delta}(t, s)\,\mathrm{d}s +$$

$$-2^{2k}\,\pi^{(n-2)/2}\,(-1)^{[(n-2k)/2]-1}\,\Gamma(k)\sum_{\mu=0}^{[(n-2k)/2]-1}\frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,\mathrm{d}_{\mu,n,k}}{\left(\frac{n-2k}{2}-1-\mu\right)!}\,\delta^{[\mu]}(t) ,$$

dove abbiamo posto

(12) $$\mathrm{d}_{\mu,n,k} = \int_0^\infty h(s)\, s^{[(n-2k-2)/2]-\mu}\,\mathrm{d}s .$$

2) Calcoleremo ora esplicitamente il valore dei coefficienti

$$\mathrm{d}_{\mu,n,k} \quad , \quad 0 \leq \nu \leq \frac{n-2k}{2} - 1 .$$

Si ha

(13) $$\mathrm{d}_{\nu,n,k} = \mathrm{I}_1(\nu, n, k) + \mathrm{I}_2(\nu, n, k) ,$$

avendo posto

(14) $$\mathrm{I}_1(\nu, n, k) = \frac{(-1)^{[(n-2k)/2]-1}}{2^{n-2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\sum_{\mu=0}^{[(n-2k)/2]-1}\frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}}{\left(\frac{n-2k}{2}-1-\mu\right)!}\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty t^{[(n-2k-2)/2]-\mu} f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^\infty s^{[(n-2k-2)/2]-\nu}\,\delta^{[\mu]}(s)\,\mathrm{d}s ,$$

(15) $$\mathrm{I}_2(\nu, n, k) = \frac{(-1)^{(n-2k)/2}}{2^{(2k+n-2)/2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\int_0^\infty s^{[(n-2k-2)/2]-\nu}\,\mathcal{H}_{(n-2k)/2}\{f(t)\}\,\mathrm{d}s .$$

Dalla ben nota formola

$$(16)\qquad s^l\,\delta^{[\mu]} = \begin{cases} 0 & \text{per } l > \mu\,, \\ \dfrac{(-1)^l\,\mu!}{(\mu-l)!}\,\delta^{[\mu-l]} & \text{per } l \leq \mu\,, \end{cases}$$

risulta che i termini della somma nel secondo membro della (14) sono nulli, salvo quando $\mu = [(n-2k-2)/2] - \nu$. Da questo segue

$$(17)\qquad I_1(\nu\,,n\,,k) = \frac{(-1)^{[(n-2k)/2]-1}\,2^{-2k-2\nu}\left(\dfrac{n-2k-2}{2}-\nu\right)!}{\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)\,\nu!}\int\limits_0^\infty f(t)\,t^\nu\,dt\,.$$

Ora calcoleremo I_2. Si ha

$$(18)\qquad I_2(\nu\,,n\,,k) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-2k)/2}}{2^{(2k+n-2)/2}\,\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty s^{[(n-2k-2)/2]-\nu}\,ds\int\limits_0^\infty f(t)\,t^{(n-2k)/2}\,R_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\,dt\,.$$

Scambiando l'ordine d'integrazione nel secondo membro della (18) [si dimostra senza difficoltà che questo scambio è lecito tenendo conto dell'ipotesi (3)], si ottiene

$$(19)\qquad I_2(\nu\,,n\,,k) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-2k)2}}{\pi^{(n-2)/2}\,2^{(2k+n)/2}\,\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty f(t)\,t^{(n-2k)/2}\,dt\int\limits_0^\infty s^{[(n-2k-2)/2]-\nu}\,R_{(n-2k)/2}(\sqrt{st})\,ds\,.$$

L'integrale interno si calcola facilmente in base al ben noto risultato

$$\int\limits_0^\infty J_\mu(x)\,x^{a-\mu-1}\,dx = \frac{2^{a-\mu-1}\,\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu-\dfrac{a}{2}+1\right)}\,,$$

che vale per $0 < a < \mu + \frac{3}{2}$.

Otteniamo quindi [cfr. la (17)]:

$$(21)\qquad I_2(\nu\,,n\,,k) = \frac{(-1)^{(n-2k)/2}\,2^{-2k-2\nu}\left(\dfrac{n-2k-2}{2}-\nu\right)!}{\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(k)\,\nu!}\int\limits_0^\infty f(t)\,t^\nu\,dt =$$

$$= -I_1(\nu\,,n\,,k)\,.$$

Dalle (13), (21) si ricava

$$(22)\qquad d_{\nu,n,k} = 0 \qquad \text{per} \quad 0 \leq \nu \leq \frac{n-2k}{2} - 1\,.$$

Dalle (11), (22) risulta immediatamente che è valida la (4), ciò che finisce la dimostrazione del Teorema 1.

3) Nel caso particolare $n = 4$, $k = 1$, le (2) e (4) assumono la forma

$$h(s) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\delta(s)}{4\pi} - \frac{t R_1(\sqrt{ts})}{8\pi} \right\} f(t)\, dt, \tag{23}$$

$$f(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\delta(t)}{4\pi} - \frac{s R_1(\sqrt{ts})}{8\pi} \right\} h(s)\, ds. \tag{24}$$

Le formole reciproche (23) e (24) sono state stabilite (in base a considerazioni euristiche) dal Källen (cfr. [1]). Questi ed altri scienziati (cfr. [2], [3]) hanno fatto interessanti applicazioni di tali formole reciproche alla teoria quantica dei campi.

BIBLIOGRAFIA

[1] KÄLLEN G., *Rélations de dispersion et particules élémentaires*, Paris, Hermann, 1960, pp. 412–413.

[2] KÄLLEN G. and TOLL J., *Integral representations for the vacuum expectation value of three scalar local fields*, « Helvetica Physica Acta », *33*, 753–772 (1960).

[3] SVENSSON Y., *Relation between Fourier transform and integral representation for the two and three point functions*, « Nuclear Physics », *39*, 198–219 (1962).