
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PLACIDO CICALA

Un metodo di discretizzazione per la piastra elastica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.1, p. 57–61.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_1_57_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Un metodo di discretizzazione per la piastra elastica.*

Nota (*) del Corrisp. PLACIDO CICALA.

SUMMARY. — A compatible quadrilateral displacement field is translated along the coordinate lines on the midplane of the plate at intervals $1/3$ the field width. Plate deflections are represented by a combination of such displacement fields. Energy variation equations furnish the equilibrium conditions. These equations, when written for the incomplete fields intersected by the contour, yield the boundary conditions.

SCHEMA DEL METODO

Stabilite nel piano medio della piastra le coordinate cartesiane ξ_a, ξ_b con angolo di obliquità α e fissate le lunghezze a, b si esprimono gli spostamenti normali w nella forma

$$(I) \quad w = \Sigma W_{jk} f_a(j) f_b(k)$$

essendo j, k interi successivi, W fattori da determinare e

$$f_a(j) = f\left(\frac{\xi_a}{a} - 2j\right) \quad , \quad f_b(k) = f\left(\frac{\xi_b}{b} - 2k\right)$$

$$f(\xi) = (\xi + 3)^2/2 \quad \text{per} \quad -3 \leq \xi \leq -1$$

$$f(\xi) = 3 - \xi^2 \quad \text{per} \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$f(\xi) = (\xi - 3)^2/2 \quad \text{per} \quad 1 \leq \xi \leq 3$$

con $f(\xi) = 0$ per $\xi < -3$ e $\xi > 3$. Il campo j, k di spostamenti, corrispondente a $W_{jk} = 1$, si estende al parallelogramma di lati $6a, 6b$ con baricentro nel « nodo centrale » $\xi_a = 2ja, \xi_b = 2kb$, con distribuzione continua sino alle derivate prime (fig. 1 a). Nell'elemento finito (tratteggiato in figura) delimitato dalle dividenti $\xi_a = (2j \pm 1)a, \xi_b = (2k \pm 1)b$ intorno al nodo C intervengono i 9 campi aventi nodi centrali in N, G, E, F, S, L, W, M. Indicando con la lettera del nodo il relativo valore di W , con $w' = \partial w / \partial \xi_a$, $w'' = \partial w / \partial \xi_b$, si hanno nel punto C i valori

$$(2) \quad w = 9C + 3(N + E + S + W)/2 + (G + F + L + M)/4$$

$$(3) \quad aw' = 3(E - W) + (G + F - L - M)/2$$

$$(4) \quad bw'' = 3(N - S) + (G - F - L + M)/2$$

$$(5) \quad a^2 w'' = 3(E + W - 2C) + (G + F - 2S + L + M - 2N)/2$$

$$(6) \quad b^2 w'' = 3(N + S - 2C) + (G - 2E + F + L - 2W + M)/2$$

$$(7) \quad abw'' = G - F + L - M.$$

(*) Presentata all'Accademia il 15 gennaio 1972.

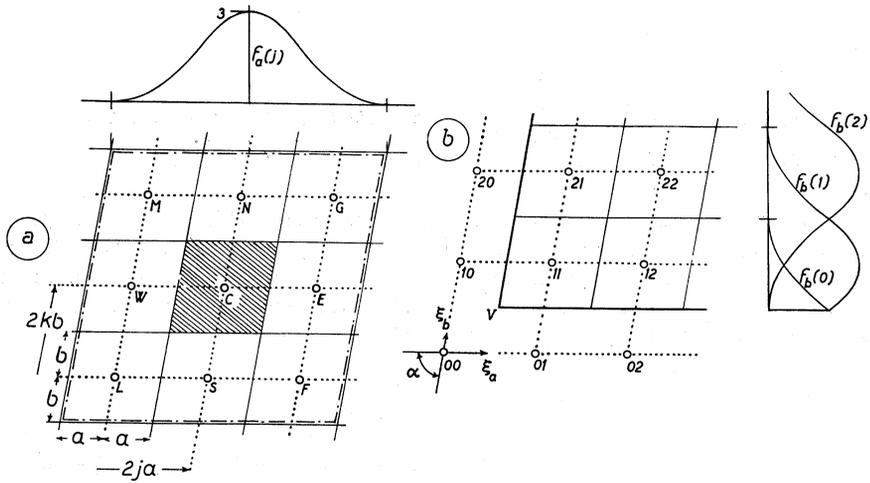


Fig. 1.

Il lavoro elastico corrispondente ad un sistema di tensioni s relative a spostamenti w_s , nelle deformazioni create da spostamenti w_d sia espresso nella forma

$$(8) \quad L_i = \iint [w_d'' (b_{11} w_s'' + b_{12} w_s'' + b_{13} w_s') + w_d' (b_{12} w_s'' + b_{22} w_s'' + b_{23} w_s') + w_d' (b_{13} w_s'' + b_{23} w_s'' + b_{33} w_s')] d\xi_a d\xi_b$$

i limiti di integrazione essendo definiti dal contorno c della superficie media. I coefficienti elastici b nel caso della piastra isotropa sono

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin^3 \alpha b_{11} &= K = \sin^3 \alpha b_{22} \\ \sin^3 \alpha b_{12} &= K \cos^2 \alpha + \nu K \sin^2 \alpha \\ \sin^3 \alpha b_{33} &= 4 K \cos^2 \alpha + 2 (1 - \nu) K \sin^2 \alpha \\ \sin^3 \alpha b_{13} &= -2 K \cos \alpha = \sin^3 \alpha b_{23} \end{aligned}$$

essendo K la rigidezza della piastra e ν il coefficiente di Poisson.

Sia L_e il lavoro che negli spostamenti w_d compiono le forze applicate sul contorno c e nei punti interni a questo per rendere equilibrato il sistema s ; se gli spostamenti d verificano le condizioni di congruenza, sarà

$$(10) \quad L_i = L_e.$$

Per calcolare i coefficienti W_{jk} si possono scrivere le equazioni $(10)_{jk}$ assumendo $w_d = f_a(j) f_b(k)$ e $w_s = w$ secondo la (1). Così, variando la scelta del sistema d si hanno tante equazioni quante sono le incognite. Alcuni dei campi con nodo centrale interno a c ed altri con nodo esterno sono intersecati dalla linea c : le equazioni che da questi si ottengono forniscono le condizioni

al contorno, se su questo sono assegnate le forze. Se si hanno vincoli relativi agli spostamenti, questi si traducono in relazioni fra le W_{jk} che restringono il numero delle equazioni $(10)_{jk}$ e, corrispondentemente, delle incognite W .

Si consideri, in particolare il caso in cui parte del contorno sia rappresentata dai segmenti $\xi_a = a$, $\xi_b = b$ presso il vertice v (fig. 1 b). Con le notazioni della figura, dei vari nodi jk saranno intersecati dal contorno solo i campi corrispondenti a j o k uguali a zero o 1. Se i fattori b sono costanti si possono dare le espressioni generali per i coefficienti delle incognite che entrano nell'equazione $(10)_{jk}$: essi si dispongono nella matrice 5×5

$$(11) \quad M = \frac{1,6 b^3}{3 a^2} b_{11} I_1(k) I_2^t(j) + \frac{1,6 a^2}{3 b^2} b_{22} I_2(k) I_1^t(j) + \frac{16}{9} b_{12} I_3(k) I_4^t(j) + \\ + \frac{16}{9} b_{12} I_4(k) I_3^t(j) + \frac{16}{9} b_{33} I_5(k) I_5^t(j) + \frac{4b}{3a} b_{13} I_6(k) I_7^t(j) + \\ + \frac{4b}{3a} b_{13} I_8(k) I_9^t(j) + \frac{4a}{3b} b_{23} I_7(k) I_6^t(j) + \frac{4a}{3b} b_{23} I_9(k) I_8^t(j)$$

essendo I le matrici colonna le cui trasposte sono

$$\begin{array}{lll} I_1^t(0) = 0, 0, 6, 13, 1 & I_1^t(1) = 0, 13, 60, 26, 1 & I_1^t(\geq 2) = 1, 26, 66, 26, 1 \\ I_2^t(0) = 0, 0, 1, -2, 1 & I_2^t(1) = 0, -2, 5, -4, 1 & I_2^t(\geq 2) = 1, -4, 6, -4, 1 \\ I_3^t(0) = 0, 0, 1, -2, 1 & I_3^t(1) = 0, 4, -7, 2, 1 & I_3^t(\geq 2) = 1, 2, -6, 2, 1 \\ I_4^t(0) = 0, 0, 1, 4, 1 & I_4^t(1) = 0, -2, -7, 2, 1 & I_4^t(\geq 2) = 1, 2, -6, 2, 1 \\ I_5^t(0) = 0, 0, -2, 1, 1 & I_5^t(1) = 0, 1, -4, 2, 1 & I_5^t(\geq 2) = 1, 2, -6, 2, 1 \\ I_6^t(0) = 0, 0, -3, 2, 1 & I_6^t(1) = 0, -8, -3, 10, 1 & I_6^t(\geq 2) = -1, -10, 0, 10, 1 \\ I_7^t(0) = 0, 0, -1, 0, 1 & I_7^t(1) = 0, 2, -1, -2, 1 & I_7^t(\geq 2) = -1, 2, 0, -2, 1 \\ I_8^t(0) = 0, 0, 3, 8, 1 & I_8^t(1) = 0, -2, 3, 10, 1 & I_8^t(\geq 2) = -1, -10, 0, 10, 1 \\ I_9^t(0) = 0, 0, 1, -2, 1 & I_9^t(1) = 0, 0, 1, -2, 1 & I_9^t(\geq 2) = -1, 2, 0, -2, 1. \end{array}$$

Le colonne di M contengono i coefficienti delle W per i nodi sulle dividenti $\xi_a = 2(j-2)a, 2(j-1)a, 2ja, 2(j+1)a, 2(j+2)a$: le righe si riferiscono alle dividenti $\xi_b = 2(k-2)b, 2(k-1)b, 2kb, 2(k+1)b, 2(k+2)b$, ordinatamente. Risolte le equazioni (10) , in base alla (1) si calcolano tensioni e deformazioni: per i valori nei nodi bastano le (2) – (9) .

CONSIDERAZIONI COMPARATIVE

Il metodo qui proposto per la risoluzione dell'equazione biarmonica della piastra costituisce un affinamento di quello suggerito precedentemente ⁽¹⁾, che si può derivare da questo schematizzando l'andamento delle funzioni

(1) P. CICALA, *Teoria lineare discretizzata delle strutture a guscio*, Questi «Rendiconti», p. 545, maggio 1969. Le condizioni al contorno sono trattate nella Nota *Linear shell theory for rapid variation solutions*, «Meccanica», 6, p. 59, marzo 1971.

$f(\xi)$, $df/d\xi$ mediante grafici a gradini. Nell'impostazione qui adottata, in virtù della congruenza delle deformazioni componenti lo sviluppo (1), resta assicurata la monotona convergenza nei valori dell'energia totale al crescere del frazionamento. In sostanza si tratta di un procedimento di risoluzione per deformazioni compatibili, con elementi finiti quadrilateri (individuati dalle dividenti a tratto continuo nella fig. 1). Dai numerosi metodi sviluppati su questo indirizzo ⁽²⁾ esso si differenzia per il fatto che in quelli gli spostamenti componenti interessano elementi che abbiano un lato o un vertice comune, sicché, in relazione con l'ordine del problema differenziale, più tipi di campi vanno introdotti, mentre qui, poiché tali componenti si estendono, lungo le linee coordinate, a tre elementi, si può trattare il problema del IV ordine con un solo tipo di campo, introducendo un solo parametro W per elemento, laddove nei più semplici metodi sinora ideati per elementi compatibili quadrilateri ⁽³⁾ si hanno non meno di 4 incognite per ciascun elemento.

Il metodo proposto presenta qualche difficoltà nella sua generalizzazione a reti di coordinate curvilinee. L'estensione a coordinate generiche per la piastra comporta l'adozione di una espressione di L_i più complicata che la (8) e rende laboriosa l'integrazione, ma non richiede alcun cambiamento nelle posizioni (1) per la congruenza della deformazione. Però, mentre nel riferimento cartesiano sono direttamente verificate le condizioni di Zinkiewicz circa la rappresentazione dei moti rigidi e degli stati uniformi di tensione, queste richiedono particolare esame nel caso di coordinate curvilinee. Può convenire adottare una rappresentazione isoparametrica esprimendo le coordinate cartesiane x, y mediante sviluppi del tipo (1), ossia scrivendo

$$x = \sum X_{jk} f_a(j) f_b(k)$$

e analoga per y , e calcolando i coefficienti X, Y in base a relazioni analoghe alle (2), in funzione delle coordinate dei nodi.

L'espressione che si ottiene combinando le incognite W mediante i 25 coefficienti dati dalla (11) può essere raffrontata con le corrispondenti differenze finite e, come queste, va esaminata nel suo comportamento al limite $\Delta \rightarrow 0$, essendo $\Delta \approx a, b$. Questa indagine ha mostrato per il riferimento cartesiano che sia le equazioni relative ai nodi interni, sia quelle scritte lungo i lati di contorno ($j = 0, j = 1, k = 0, k = 1$) sono affette da errore relativo $o(\Delta^2)$. Invece le equazioni relative ai campi 00, 01, 10, 11, negli sviluppi in serie di Taylor con origine nel vertice V , rivelano errori $o(\Delta)$ nei termini

(2) Pregevoli rassegne su questo campo sono fornite dalle opere: G. SANDER, *Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques*, Publ. de l'Université de Liège, n. 15, 1969 e O. C. ZINKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw Hill 1967.

(3) F. K. BOGNER, R. L. FOX e L. A. SCHMIDT, *The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas*, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Dayton, Ohio, October 1965.

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, *A conforming finite element for plate bending*, « Intern. Journ. of Solids and Structures », 4 (1968).

in b_{12} , b_{13} , b_{23} contenenti le derivate w''' , w'''' . Sebbene la posizione (I) introduca discontinuità già nelle quantità w'' , w''' , detti errori sono di lieve entità.

In conclusione il metodo proposto presenta errori dello stesso ordine delle usuali espressioni di differenze finite, ma nell'applicazione possiede i notevoli vantaggi propri dei metodi che poggiano su concetti energetico variazionali: fra questi, la simmetria del sistema, voluta dalla reciprocità di Betti. A confronto con i corrispondenti metodi per elementi finiti, risulta qui più semplice la costruzione della matrice di rigidezza, la quale inoltre possiede una banda diagonale più stretta. Per questa proprietà, che semplifica il frazionamento del campo, necessario ad evitare sistemi di equazioni di eccessive dimensioni, si può rinunciare ad una eventuale maggior precisione, specialmente in vista della estensione ai problemi più complessi nelle strutture a guscio.