Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Pierre Grisvard

## Interpolation non commutative

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **52** (1972), n.1, p. 11–15.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_1_11_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

**Analisi matematica.** — *Interpolation non commutative.* Nota di PIERRE GRISVARD, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Dati due operatori chiusi (non limitati) A e B in uno spazio di Banach E, si prova che gli spazi d'interpolazione reale tra $D_A \cap D_B$ e E sono l'intersezione dei corrispondenti spazi d'interpolazione tra $D_A$ e E da una parte e $D_B$ e E dall'altra parte, sotto opportune ipotesi su A e B che non implicano la commutatività delle risolventi di A e B (Risposta parziale a una domanda di Peetre [3]).

## 1. RAPPELS

1.1. Soient F et E deux espaces de Banach tels que $F \subset E$ avec injection continue; l'une des multiples définitions possibles des espaces d'interpolation réelle entre F et E est d'après Lions–Peetre [2], la suivante: $(F\,;E)_{\theta,p}$ est l'espace des $x \in E$ tels qu'il existe deux fonctions $u_0$ et $u_1$ vérifiant

$$(1) \qquad \begin{cases} x = u_0(t) + u_1(t)\,, & t > 0\,, \\ t^{-\theta}\, u_0 \in L^p_*(F) & \\ t^{1-\theta}\, u_1 \in L^p_*(E) & \end{cases}$$

où $L^p_*(F)$ et $L^p_*(E)$ désignent l'espace des fonctions définies dans $(0\,,+\infty)$ à valeurs dans F et E respectivement et de puissance $p$ intégrable par rapport à la mesure $dt/t$, $1 \le p \le +\infty$ et $0 < \theta < 1$. La norme de l'espace $(F\,;E)_{\theta,p}$ est

$$x \longmapsto \operatorname{Inf}\left(\left(\int_0^{+\infty} \|t^{-\theta}\, u_0(t)\|_F^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} + \left(\int_0^{+\infty} \|t^{1-\theta}\, u_1(t)\|_E^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}\right)$$

le Inf étant pris par rapport à tous les couples de fonctions $u_0$ et $u_1$ vérifiant (1).

1.2. Dans le cas particulier où $F = D_A$, domaine d'un opérateur fermé A dans E, muni de la norme du graphe, on peut d'après Grisvard [1], expliciter l'espace $(D_A\,;E)_{\theta,p}$ lorsque A vérifie l'hypothèse suivante

$$(2) \qquad \begin{cases} A + t \text{ est inversible pour tout } t > 0 \text{ et il existe une constante } C_A \\ \text{telle que } \|t\,(A+t)^{-1}\|_{E \to E} \le C_A \text{ pour tout } t > 0\,. \end{cases}$$

L'espace $(D_A\,;E)_{\theta,p}$ est alors l'espace des $x \in E$ tels que $t^{1-\theta} A(A+t)^{-1} x \in L^p_*(E)$, et sa norme est équivalente à

$$x \longmapsto \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \|t^{1-\theta} A\,(A+t)^{-1} x\|_E^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

## 2. Un Theoreme

A présent, on suppose donnés simultanément un espace de Banach $F \subset E$ avec injection continue et un opérateur A non borné de domaine $D_A$ dans E, vérifiant (2). On suppose que A et F vérifient l'hypothèse suivante:

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } t > 0 \text{, F est invariant par } (A+t)^{-1} \text{ et il existe une} \\ \text{constante } C'_A \text{ telle que } \| t (A+t)^{-1} \|_{F \to F} \leq C'_A \text{ pour tout } t > 0. \end{array} \right.$

Considérant $D_A \cap F$ comme un espace de Banach pour la norme

$$x \longmapsto \| Ax \|_E + \| x \|_F ,$$

on a le:

Theoreme. *Sous les hypothèses* (2) *et* (3), *on a l'identité*

$$(D_A \cap F ; E)_{\theta, p} = (D_A ; E)_{\theta, p} \cap (F ; E)_{\theta, p}$$

*pour tout* $\theta \in ]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$.

Un cas particulier intéressant est celui où F est le domaine $D_B$ d'un second opérateur fermé B dans E. Si pour simplifier on suppose que B est inversible, l'hypothèse (3) est vérifiée lorsque A et B vérifient

(4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } t > 0 \text{, } D_B \text{ est invariant par } (A+t)^{-1} \text{ et il existe une con-} \\ \text{stante } C'_A \text{ telle que } \| tB (A+t)^{-1} B^{-1} \|_{E \to E} \leq C'_A \text{ pour tout } t > 0. \end{array} \right.$

L'hypothèse (4) est évidemment vérifiée lorsque $(A+t)^{-1}$ et $B^{-1}$ commutent mais ce n'est pas nécessaire.

Un autre cas particulier intéressant est celui où – A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe borné et fortement continu dans E; l'hypothèse (2) est alors vérifiée et les hypothèses (3) et (4) sont respectivement équivalentes à (3′) et (4′):

(3′) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } t > 0 \text{, F est invariant par } e^{-tA} \text{ et il existe une constante} \\ C'_A \text{ telle que } \| e^{-tA} \|_{F \to F} \leq C'_A \text{ pour tout } t > 0. \end{array} \right.$

(4′) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } t > 0 \text{, } D_B \text{ est invariant par } e^{tA} \text{ et il existe une constante} \\ C'_A \text{ telle que } \| B e^{-tA} B^{-1} \|_{E \to E} \leq C'_A \text{ pour tout } t > 0. \end{array} \right.$

## 3. Demonstration

L'inclusion de «gauche à droite» est évidente, il suffira donc de prouver que si

$$x \in (D_A ; E)_{\theta, p} \cap (F ; E)_{\theta, p} ,$$

on peut construire une couple de fonctions $u_0$ et $u_1$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = u_0(t) + u_1(t) , & t > 0 \\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(D_A \cap F) & \\ t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(E) . & \end{array} \right.$$

Des hypothèses sur $x$, on déduit que

$$t^{1-\theta} A (A+t)^{-1} x \in L_*^p (E)$$

et qu'il existe une couple de fonctions $v_0$ et $v_1$ vérifiant

$$\begin{cases} x = v_0(t) + v_1(t), & t > 0 \\ t^{-\theta} v_0 \in L_*^p(F) \\ t^{1-\theta} v_1 \in L_*^p(E). \end{cases}$$

Utilisant l'identité

$$I = t(A+t)^{-1} + A(A+t)^{-1},$$

on est conduit à poser

$$\begin{aligned} u_0(t) &= t(A+t)^{-1} v_0(t), \\ u_1(t) &= A(A+t)^{-1} v_0(t) + v_1(t) \\ &= A(A+t)^{-1} x + t(A+t)^{-1} v_1(t). \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que $x = u_0(t) + u_1(t)$ pour tout $t > 0$ et que $t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(E)$ grâce à l'hypothèse (2). Pour vérifier que $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(D_A \cap F)$, on écrit que

$$\|t^{-\theta} u_0(t)\|_F \leq C'_A \|t^{-\theta} v_0(t)\|_F$$

grâce à l'hypothèse (3) et que

$$t^{-\theta} A u_0(t) = t^{1-\theta} A(A+t)^{-1} x - A(A+t)^{-1} t^{1-\theta} u_1(t).$$

C.Q.F.D.

## 4. REMARQUES

La démonstration ci-dessus a l'inconvénient de ne pas fournir un procédé explicite de construction de $u_0$ et $u_1$ à partir de $x$; on peut pallier à cet inconvénient dans le cas particulier où B jouit de propriétés analogues à celles de A. Précisément, on suppose que B vérifie

(5) $\begin{cases} B + t \text{ est inversible pour tout } t > 0 \text{ et il existe une constante } C_B \\ \text{telle que } \|t(B+t)^{-1}\|_{E \to E} \leq C_B \text{ pour tout } t > 0. \end{cases}$

Alors, sous les hypothèses (2) (4) (5), on démontre le Théorème en posant explicitement:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= t^2 (A+t)^{-1} (B+t)^{-1} x \\ u_1(t) &= x - u_0(t) \\ &= A(A+t)^{-1} x + t(A+t)^{-1} x - t^2 (A+t)^{-1} (B+t)^{-1} x \\ &= A(A+t)^{-1} x + t(A+t)^{-1} B(B+t)^{-1} x. \end{aligned}$$

Puisque $x \in (D_A ; E)_{\theta,p} \cap (D_B ; E)_{\theta,p}$, on a:

$$(6) \qquad \begin{cases} t^{1-\theta} A (A+t)^{-1} x \in L_*^p (E) \\ t^{1-\theta} B (B+t)^{-1} x \in L_*^p (E) ; \end{cases}$$

on en déduit $t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p (E)$ grâce à (2) puis que $t^{-\theta} u_0 \in L_*^p (D_A)$ en écrivant que

$$\begin{aligned} Au_0(t) &= tA (A+t)^{-1} \{1 - B (B+t)^{-1}\} x \\ &= tA (A+t)^{-1} x - A (A+t)^{-1} tB (B+t)^{-1} x . \end{aligned}$$

Enfin, on prouve que $t^{-\theta} u_1 \in L_*^p (D_B)$ en écrivant

$$Bu_0(t) = tB (A+t)^{-1} B^{-1} tB (B+t)^{-1} x$$

et en utilisant (4).

Ce résultat a un intérêt surtout lorsqu'on considère les espaces d'interpolation réels comme des espaces de traces: en effet, d'après Lions–Peetre [2], $(D_A \cap D_B ; E)_{\theta,p}$ est l'espace des $x = u(0)$ lorsque $u$ décrit l'espace W défini par les conditions

$$(7) \qquad \begin{cases} t^{\theta} u \in L_*^p (D_A \cap D_B) \\ t^{\theta} u' \in L_*^p (E) \end{cases}$$

On a alors la

PROPOSITION. *L'application $u \to u(0)$ est linéaire continue de l'espace* W *des $u$ vérifiant* (7) *sur l'espace des $x \in E$ vérifiant* (6); *de plus, $u \mapsto u(0)$ admet un relèvement linéaire continu* (W *étant muni de la norme évidente*).

## 5. Deux Exemples

5.1. On pose $E = L^p(\mathbf{R}^n)$, $F = W_p^m(\mathbf{R}^n)$ espace de Sobolev usuel d'ordre $m$ relatif à $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < +\infty$ et

$$Au(x) = \varphi(x)\, u(x)$$

avec $D_A = \{u ; u , \varphi u \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$ (les notations sont celles de Lions–Peetre ([2]). On suppose que $\varphi$ est une fonction $> 0$ telle que:

$$\frac{\partial^j \varphi}{\partial x_k^j} \frac{1}{\varphi} \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad j = 0, 1, \cdots, m \ , \ k = 1, 2, \cdots, n;$$

comme on a $(A+t)^{-1} u(x) = \dfrac{u(x)}{\varphi(x)+t}$, $t > 0$ et

$$\frac{\partial^m}{\partial x_k^m} \frac{u}{\varphi+t} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left( \frac{\partial^j}{\partial x_k^j} \frac{1}{\varphi+t} \right) \frac{\partial^{m-j} u}{\partial x_k^{m-j}}$$

on vérifie facilement les hypothèses (2) et (3). Appliquant le Théorème, on obtient l'identité

$$(\{u \in W_p^m(\mathbf{R}^n) ; \varphi u \in L^p(\mathbf{R}^n)\} ; L^p(\mathbf{R}^n))_{\theta, p}$$
$$= \{u \in B_p^{m(1-\theta)}(\mathbf{R}^n) ; \varphi^{1-\theta} u \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$$

où $B_p^{m(1-\theta)}(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace de Besov d'ordre $m(1 - \theta)$ relatif à $L^p(\mathbf{R}^n)$ (Notations de Lions–Peetre [2]).

Ceci généralise l'exemple de Peetre [3] qui est relatif au cas $m = n = 1$ avec $\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/2}$.

5.2. On pose $E = L^p(\Omega)$, $F = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ en supposant que $\Omega$ est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$. On prend pour A l'opérateur défini par

$$Au(x) = \varphi(x)\, u(x)$$

avec $D_A = \{u ; u , \varphi u \in L^p(\Omega)\}$; on suppose que $\varphi$ est positive et que

$$d\, \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\varphi} \in L^\infty(\Omega)$$

où $d(x)$ désigne la distance de $x$ à la frontière de $\Omega$. On vérifie les hypothèses (2) et (3) en remarquant que $u \mapsto u/d$ est linéaire continu de $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$. Appliquant le Théorème, on obtient l'identité

$$(\{u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) ; \varphi u \in L^p(\Omega)\} ; L^p(\Omega))_{\theta, p}$$
$$= \{u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{1-\theta}(\Omega) ; \varphi^{1-\theta} u \in L^p(\Omega)\}$$

où $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$ désigne le sous-espace de $W_p^s(\Omega)$ formé des $u$ vérifiant $u/d^s \in L^p(\Omega)$, $0 \leq s \leq 1$, ou ce qui revient au même, la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W_p^s(\Omega)$ lorsque $s \neq \frac{1}{p}$, $0 \leq s \leq 1$. La généralisation de cet exemple permet d'étendre au cas $p \neq 2$ une partie des résultats de Triebel [4].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] GRISVARD, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, « J. Math. Pures et Appl. », *45*, 143–290 (1966).

[2] LIONS–PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., Paris n. 19, 1–68 (1964).

[3] PEETRE, *Non commutative interpolation*, « Le Matematiche », *25* (2), 159–173 (1970).

[4] TRIEBEL, *Singuläre elliptische Differentialgleichungen und Interpolationssätze für Sobolev–Slobodeckij–Raüme mit Gewichtsfunktionen*, « Archive for Rat. Mech. and Anal. », *32*, 115–134 (1969).