
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

TINO ZEULI

**Sull'equilibrio relativo di una massa di particelle
elettrizzate (elettroni) soggetta alla propria
gravitazione ed uniformemente rotante intorno ad un
asse**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.6, p. 515–518.*
Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_515_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_515_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Elettromagnetogasdinamica. — *Sull'equilibrio relativo di una massa di particelle elettrizzate (elettroni) soggetta alla propria gravitazione ed uniformemente rotante intorno ad un asse* (*). Nota di TINO ZEULI, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI

SUMMARY. — In this paper we state the equations for the relative equilibrium of a mass of charged particles (electrons) subject to its own gravitation, uniformly rotating around an axis. Then we examine some particular cases.

1. — In questa Nota vengono stabilite le equazioni dell'equilibrio relativo di una massa di particelle elettrizzate (elettroni) soggetta al campo elettromagnetico indotto ed alla propria gravitazione, uniformemente rotante intorno ad un asse, nell'ipotesi che le particelle siano in agitazione termica e che l'effetto degli urti sia equivalente ad una pressione isotropica.

Si considera in particolare il caso in cui la massa elettronica riempia un cilindro circolare indefinito e quello in cui la rotazione è nulla. In quest'ultimo caso si dimostra la possibilità di configurazioni di equilibrio sferiche e si ha un'equazione analoga a quella di Emden dell'equilibrio stellare, suscettibile di integrazione numerica.

2. — Riferendoci al moto medio stazionario di una massa di particelle elettrizzate e precisamente di una corrente di elettroni, poiché in questo caso gli elementi del campo elettromagnetico e quelli del moto saranno indipendenti dal tempo, le equazioni da considerare sono (cfr. [1]):

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\
 (2) & \operatorname{rot} \mathbf{H} + e\mathbf{v} = 0, \\
 (3) & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\
 (4) & \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{e}{\epsilon_0} \nu = 0, \\
 (5) & \operatorname{div} (\nu \mathbf{v}) = 0, \\
 (6) & e\nu (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mu_0 \mathbf{H}) + m\nu^2 \operatorname{grad} \nu = \\
 & = m\nu \operatorname{grad} U, \\
 (7) & \Delta_2 U = -4\pi Gm\nu,
 \end{array}$$

dove $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ sono i vettori che rappresentano il campo elettrico ed il campo magnetico indotti, $\mathbf{v}$ è la velocità media delle particelle elettroniche, ν la densità elettronica (numero densità), $-e$ la carica ed m la massa di un elettrone; ϵ_0 , μ_0 sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto; v_0 è una velocità (costante) connessa con l'agitazione termica e l'azione dovuta agli urti degli elettroni; U è il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniana delle particelle e G è la costante di attrazione universale.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

Se ora supponiamo che la massa elettronica sia uniformemente rotante intorno ad un asse z , con velocità costante ω , con riferimento a coordinate cilindriche r, φ, z , sarà $\mathbf{v} = \omega r^2 \text{ grad } \varphi$ e quindi $\text{div } \mathbf{v} = 0$. L'equazione di continuità (5) porge allora

$$(8) \quad \text{grad } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} = 0.$$

La densità elettronica sarà dunque indipendente dall'anomalia φ e la distribuzione sarà simmetrica intorno all'asse z . Supporremo allora che tutti gli elementi del campo e del moto siano indipendenti da φ .

L'equazione (1) mostra che per il campo elettrico esisterà un potenziale Φ e quindi $\mathbf{E} = \text{grad } \Phi$. La (4) diventa pertanto

$$(9) \quad \Delta_2 \Phi = - \frac{e}{\varepsilon_0} v,$$

e l'equazione di equilibrio (6), dopo aver diviso per ev , porge

$$(10) \quad \text{grad } \Phi + \mu_0 \omega r (H_z \mathbf{a}_r - H_r \mathbf{a}_z) + \frac{mv_0^2}{e} \text{grad } \log v = \frac{m}{e} \text{grad } U,$$

dove $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_z$ sono i versori delle direzioni secondo cui variano le coordinate r, z , ed H_r, H_z sono le corrispondenti componenti del campo magnetico.

Le equazioni (2) e (3) diventano ora

$$(11) \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = - e \omega r v, \quad (H_\varphi = 0),$$

$$(12) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Quest'ultima mostra che per il campo magnetico esiste una funzione $W(r, z)$ tale che

$$(13) \quad H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad H_z = - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Sostituendo nella (11) si ha l'equazione

$$(14) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = - e \omega r^2 v.$$

Indicando con ∇_2 l'operatore differenziale di Beltrami

$$(15) \quad \nabla_2 = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

associato al Δ_2 di Laplace, la (14) si scrive anche più concisamente

$$(14') \quad \nabla_2 W = - e \omega r^2 v.$$

Sostituendo le (13) nella (10) si ha inoltre

$$(16) \quad \text{grad} \left\{ \Phi - \mu_0 \omega W + \frac{mv_0^2}{e} \log v - \frac{m}{e} U \right\} = 0$$

che porge l'integrale

$$(17) \quad \Phi - \mu_0 \omega W + \frac{m v_0^2}{e} \log v - \frac{m}{e} U = C \quad (\text{costante}).$$

La questione è così ridotta alla determinazione delle funzioni Φ , W , v ed U soddisfacenti alle equazioni (7), (9), (14) e (17). Ci si riduce facilmente a due sole equazioni nelle incognite v e W prendendo la divergenza di ambo i membri dell'equazione (16). Avendo riguardo all'equazione (9) ed all'equazione (7) di Poisson, si ottiene così

$$(18) \quad \Delta_2 \log v + \frac{1}{v_0^2} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \right) v - \frac{\varepsilon \mu_0 \omega}{m v_0^2} \Delta_2 W = 0,$$

che va associata all'equazione (14).

Dalla (18) si può eliminare la funzione W osservando che sussiste l'identità (v. [2], pag. 132)

$$(19) \quad \Delta_2 (\Delta_2 W - \nabla_2 W) = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \nabla_2 W.$$

Scrivendo allora $\Delta_2 W = (\Delta_2 W - \nabla_2 W) + \nabla_2 W$, ed applicando ad ambo i membri della (18) l'operatore Δ_2 di Laplace, in virtù della (14') si ottiene

$$(20) \quad \Delta_2 \Delta_2 \log v + \frac{1}{v_0^2} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \right) \Delta_2 v + \\ + \frac{\mu_0 e^2 \omega^2}{m v_0^2} \left\{ \Delta_2 (r^2 v) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right\} = 0,$$

che è un'equazione differenziale in cui è incognito il solo numero di densità v . Se sul contorno della massa elettronica non agiscono forze esterne su di esso sarà $v = 0$.

3. - Nel caso in cui la massa elettronica riempie un cilindro circolare indefinito, e tutte le grandezze sono funzioni della sola distanza r dall'asse, si ha:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_r) = 0$$

e quindi $H_r = c/r$, ($c = \text{cost.}$). In questo caso la componente H_r del campo magnetico diverrebbe infinita nei punti dell'asse. Porremo allora $H_r = 0$, e $H_z = H(r)$. In tal caso l'equazione (2) dà luogo all'unica equazione scalare

$$(21) \quad \frac{dH}{dr} = e \omega r v,$$

l'equazione di equilibrio (10) si riduce alla

$$(22) \quad \frac{d\Phi}{dr} + \mu_0 \omega r H + \frac{m v_0^2}{e} \frac{d}{dr} \log v = \frac{m}{e} \frac{dU}{dr},$$

e l'equazione (7) di Poisson diventa

$$(23) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = -4 \pi G m.$$

Inoltre la (9) porge

$$(24) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = - \frac{e}{\varepsilon_0} \nu.$$

Applicando quindi ad ambo i membri della (22) l'operatore differenziale $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \)$ si ottiene l'equazione

$$(25) \quad \frac{mv_0^2}{e} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \log \nu \right) + \frac{m}{e} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{m \varepsilon_0} \right) \nu + \mu_0 \omega \left(r \frac{dH}{dr} + 2H \right) = 0.$$

Derivando ancora ambo i membri rispetto ad r , per la (21) si ha

$$(26) \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \log \nu \right) + \frac{1}{v_0^2} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{m \varepsilon_0} \right) \nu \right\} + \\ + \frac{\mu e^2 \omega^2}{m v_0^2} \left\{ \frac{d}{dr} (r^2 \nu) + 2 r \nu \right\} = 0,$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del 3° ordine, non lineare, in cui è incognito il numero di densità ν .

4. - Un caso particolare notevole si ha quando la massa delle particelle è priva di rotazione e quindi la velocità media $\mathbf{v}$ è nulla. In questo caso si ha, dalle (2) e (3), che anche il campo magnetico deriva da un potenziale e l'equazione (18) si riduce alla seguente

$$(27) \quad \Delta_2 \log \nu + \frac{1}{v_0^2} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \right) \nu = 0.$$

In questo caso sarà possibile per la massa elettronica una configurazione sferica e detta x la distanza di una particella dal centro si avrà l'equazione

$$(28) \quad \frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dN}{dx} + \frac{1}{v_0^2} \left(4 \pi G m - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \right) e^N = 0,$$

dove si è posto $N = \log \nu$. La condizione al contorno sarà al solito $\nu = 0$ e quindi $N = \infty$. Inoltre sarà $\frac{d\nu}{dx} = 0$, e quindi $\frac{dN}{dx} = 0$ per $x = 0$, essendo nulla la variazione di ν nel centro della sfera. La (28) è analoga all'equazione di Emden dell'equilibrio stellare ed è suscettibile di integrazione numerica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. ZEULI, *Sulla propagazione di onde e.m. in una colonna di plasma, ecc.* « Ann. di Mat. pura ed appl. » (IV), 84; ID., *Sulla propagazione di onde gravitazionali, ecc.* (in corso di stampa nel volume « In memoria del prof. F. Giaccardi », Fac. di Econ. e Commercio dell'Univ. di Torino).

- [2] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica* (Ed. Cremonese, Roma 1966).