Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guy Boillat, Tommaso Ruggeri

Soluzioni lineari per la propagazione del calore in fluidodinamica relativistica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.6, p. 511–514.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_511_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Fisica matematica. — *Soluzioni lineari per la propagazione del calore in fluidodinamica relativistica.* Nota di GUY BOILLAT e TOMMASO RUGGERI (*), presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — We look for simple waves and for solutions with separate variables of the linearized equations for heat propagation with finite velocities. We compare the results with the classical ones.

1. EQUAZIONI LINEARIZZATE

Nell'ambito della fluidodinamica relativistica, l'equazione di Fourier è stata modificata per ottenere velocità finite per la propagazione delle onde di calore [1] [2] [3].

Per un fluido perfetto ($p = \mathrm{R}r\,\theta$) politropico si può prendere [3],

$$\mathrm{Q}^\alpha + \chi u^\beta \nabla_\beta \mathrm{Q}^\alpha = -\chi\, \mathrm{R}r\, \gamma^{\alpha\beta}\, \nabla_\lambda (\theta\gamma^\lambda_\beta) \qquad (\chi = \text{cost.} > 0) \tag{1}$$

dove

$$\mathrm{Q}^\alpha = \bar{q} u^\alpha + q^\alpha \qquad (q_\alpha u^\alpha = 0)$$

è il quadrivettore corrente di calore.

Alla (1) si associano le equazioni di campo:

$$\begin{aligned}
&(rfu^\alpha - q^\alpha)\, \nabla_\alpha u^\beta - \gamma^{\alpha\beta} [\partial_\alpha p + ru^\gamma \nabla_\gamma (q_\alpha/r)] = 0,\\
&r\theta u^\alpha \partial_\alpha \mathrm{S} = \nabla_\alpha q^\alpha + u_\beta u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta,\\
&\nabla_\alpha (ru^\alpha) = 0
\end{aligned}$$

dove $\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta$ ed r, p, S e θ sono rispettivamente la densità, la pressione, l'entropia e la temperatura, e con f ($rf = \rho + p$) l'indice del fluido [4].

Supponiamo che tutte le variabili del campo subiscano piccole variazioni a partire da uno stato costante che si indica con l'indice zero. Allora le equazioni linearizzate diventano:

$$r_0\, \theta_0\, \dot{\mathrm{S}} + \nabla \cdot \vec{q} = 0, \tag{2}$$

$$r_0 f_0 \dot{\vec{u}} + \nabla p + \dot{\vec{q}} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{q} + \chi \dot{\vec{q}} = -\chi\, \mathrm{R}r_0 (\nabla\theta + \theta_0 \dot{\vec{u}}), \tag{4}$$

$$\dot{r} + r_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{5}$$

$$\bar{q} + \chi \dot{\bar{q}} = 0 \tag{6}$$

con $\vec{u}_0 = \vec{q}_0 = 0$ e $\bar{q}_0 = 0$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Contratti di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

Se si fà la divergenza delle (3) e (4) e si tiene conto delle rimanenti equazioni, si ottiene:

$$\chi\, R\theta_0\, \ddot{r} + \chi r_0\, \theta_0\, \ddot{S} + r_0\, \theta_0\, \dot{S} = \chi\, R r_0\, \Delta\theta\,,$$

$$f_0\, \ddot{r} + r_0\, \theta_0\, \ddot{S} = \Delta p\,.$$

Scegliamo come variabili indipendenti r e θ, tenendo conto che $S_r = -R/r$ e $S_\theta = C_v/\theta$, si ha:

$$\chi\,(\ddot{\theta} - \lambda_2^2\,\Delta\theta) + \dot{\theta} - \lambda_2^2\,(\theta_0/r_0)\,\dot{r} = 0\,, \tag{7}$$

$$\ddot{\theta} - \lambda_2^2\,\Delta\theta + (\ddot{r} - \lambda_1^2\,\Delta r)\,(\rho_0/r_0^2\,C_v) = 0 \tag{8}$$

avendo indicato con $\lambda_1 = \sqrt{p_0/\rho_0}$ e $\lambda_2 = \sqrt{\gamma - 1}$ $(\gamma = C_p/C_v)$ le velocità di propagazione delle onde di discontinuità [3].

2. Onde piane

Cerchiamo una soluzione di (7) e (8) del tipo

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \theta = \theta(\varphi) \tag{9}$$

con

$$\varphi = x - \lambda t\,.$$

Dalla (8), si ottiene,

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)\, r = -(r_0^2\, C_v/\rho_0)\,(\lambda^2 - \lambda_2^2)\,\theta + C\varphi + \text{cost.} \tag{10}$$

(dove è necessario porre C=0 in modo che r e θ si mantengano sempre piccoli).

Da (7), tenendo conto di (9) e (10), si ha,

$$\theta'' + k\theta' = 0\,, \tag{11}$$

con

$$k = -\frac{1 + \lambda_1^2}{\chi}\,\frac{\lambda\,(\lambda^2 - \lambda_s^2)}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)\,(\lambda^2 - \lambda_2^2)} \tag{12}$$

dove

$$\lambda_s = \sqrt{\gamma p_0/r_0\, f_0}$$

è la velocità del suono ed è interessante notare come essa appaia spontaneamente in k.

Pertanto la soluzione della (11) è:

$$\theta = C_1 + C_2\, e^{-k\varphi}. \tag{13}$$

Notiamo che k non è funzione lineare di λ e per piccoli valori di esso assume l'aspetto,

$$k = \lambda C_p/\chi R \tag{14}$$

che corrisponde al caso parabolico di Fourier.

La (13) dovendo convergere all'infinito comporta che per $x \geq 0$ e $t \geq 0$ si abbia $\lambda < 0$ e $k > 0$ ovvero per la (12),

$$\lambda_1 < |\lambda| \leq \lambda_s$$

oppure

$$|\lambda| > \lambda_2 .$$

A differenza del caso classico (14) λ e k hanno sempre il medesimo segno.

3. Una soluzione a variabili separate

Cerchiamo adesso soluzioni di (7) e (8) del tipo,

$$r = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t) \quad , \quad \theta = \xi(x)\,\mathrm{T}(t). \tag{15}$$

Moltiplicando per χ la (18) sottraendo da (7) e tenendo conto della (15) si ha,

$$\frac{\ddot{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}} - \lambda_1^2 \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} + \frac{\lambda_1^2}{\chi} \frac{\dot{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}} \left(1 - \frac{r_0}{\lambda_2^2 \theta_0} \frac{\xi}{\mathrm{X}}\right) = 0 . \tag{16}$$

Derivando rispetto a x e t, si ottiene,

$$(\dot{\mathrm{T}}/\mathrm{T})^{\cdot}\,(\xi/\mathrm{X})' = 0 . \tag{17}$$

È facile vedere che entrambi i casi verificanti la (17) (tenendo conto di (16) e della (7)) portano a soluzioni accettabili (convergente all'infinito) per r del tipo,

$$r = (ae^{-\mu x} + be^{-\nu x})\, e^{-\sigma\chi t} \quad , \quad \sigma\chi^2 > 1 + \lambda_1^2,$$

$$r = [a \cos(\omega x + \alpha) + be^{-\mu x}]\, e^{-\sigma\chi t} \quad , \quad \sigma\chi^2 < 1 + \lambda_1^2,$$

essendo μ^2, ν^2 e $-\omega^2$ radici dell'equazione,

$$\lambda_2^2 z^2 - \sigma [\sigma\chi^2 (1 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^2) - (1 + \lambda_2^2)]\, z - \sigma^3 \chi^2 \lambda_1^{-2} (1 + \lambda_1^2 - \sigma\chi^2) = 0,$$

che ha per discriminante Δ,

$$\Delta/\sigma^2 = [(\sigma\chi^2/\lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + 1 - \lambda_2^2]^2 + 4\lambda_2^2 > 0 .$$

Casi particolari:

Se $\sigma\chi^2 \ll 1$, allora $\mu \cong 0$ ed $\omega^2 \cong \sigma \mathrm{C}_p/\mathrm{R}$ e la soluzione per θ è della forma,

$$\theta \cong \left[\mathrm{C}_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\sigma \mathrm{C}_p}{\mathrm{R}}}\, x + \alpha\right) + \mathrm{C}_2\right] e^{-\sigma\chi t},$$

ritrovando così il caso classico.

Se invece, di contro, si suppone $\sigma\chi^2 \gg 1$ si ha,

$$\mu \cong \frac{\sigma\chi}{\lambda_1} \quad , \quad \nu \cong \frac{\sigma\chi}{\lambda_2}$$

e la soluzione è del tipo,

$$\theta \cong \left(a e^{-(\sigma\chi/\lambda_1)x} + b e^{-(\sigma\chi/\lambda_2)x}\right) e^{-\sigma\chi t}$$

che come si vede è data dalla sovrapposizione di due onde piane con velocità di propagazione $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$.

Bibliografia

[1] C. Cattaneo, « Atti del Seminario matematico e fisico della Università di Modena », *8*, 1 (1948); « C. R. Acad. Sc. Paris », *247*, 431 (1958).

[2] M. Kranyš, « Nuovo Cimento », *42* B, 51 (1966); *50* B, 48 (1967).

[3] G. Boillat, *Velocities of heat propagation in relativistic polytropic fluids*, « Lett. Nuovo Cimento », *3*, 856 (1970); *Sur la propagation de la chaleur en relativité*, in [5].

[4] A. Lichnerowicz e A. H. Taub, in [5].

[5] C. Cattaneo, Ed., *Relativistic Fluid dynamics*, corso C.I.M.E. 1970, Edizioni Cremonese, Roma (1971).