S. Swaminathan

Sur les espaces uniformes pseudocompacts

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.6, p. 500–501.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_500_0>

Topologia. — *Sur les espaces uniformes pseudocompacts.* Nota di S. SWAMINATHAN, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Si dimostra un Teorema il quale fornisce condizioni affinché uno spazio uniforme sia pseudocompatto. Se ne deduce agevolmente un risultato di W. W. Comfort e K. A. Ross sui gruppi topologici.

Suivant J. M. Kister [3] on appelle un espace uniforme (X, U) uniformément localement précompact (ULP) s'il existe un entourage $U \in \mathfrak{U}$ tel que pour tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ on peut trouver un entier $n\ (= n(V))$ tel que, pour tout $x \in X$, la coupe $U[x]$ soit la réunion de au plus n sous ensembles A de X avec $A \times A \subset V$. Cette propriété est une localisation de celle de precompacité et elle en est une conséquence. Kister a demontré que si $(X, \mathfrak{U})$ est un tel espace uniforme, normal, sur lequel chaque fonction réelle continue est uniformément continue et n'ayant qu'un nombre fini de points isolés, alors X est semi–compact (ou dénombrablement compact). On sait bien qu'un espace normal T_1 est semi–compact si, et seulement si, il est pseudocompact. Notre but ici est de démontrer qu'il est possible de déduire que $(X, \mathfrak{U})$ est pseudocompact sans utiliser l'hypothèse que X est normal dans le résultat de Kister. Précisement on a la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit* $(X, \mathfrak{U})$ *un espace uniforme* ULP *sur lequel chaque fonction réelle continue est uniformément continue. Si* X *n'a qu'un nombre fini de points isolés, alors* X *est un espace pseudocompact.*

DÉMONSTRATION. On se sert du fait qu'un espace completement régulier X est pseudocompact si, et seulement si, X est faiblement compact, c–à–d., si chaque famille localement finie d'ouverts de X est finie. Voir [1] pour ce résultat.

Supposons que X ne soit pas pseudocompact. On peut donc se donner une famille $\{R_i : i = 1, 2, \cdots\}$ infinie d'ouverts disjoints de X. Choisissons $x_i \in R_i$ pour chaque i. Soit U l'entourage dont l'existence nous est assurée par la condition ULP. Si $M_i = U[x_i] \cap R_i$, la famille $\{M_i\}$ est localement finie et disjointe. Pour chaque i, choisissons i points $y_i^1, y_i^2, \cdots, y_i^i$ dans M_i et soit D l'ensemble des points ainsi choisis. On peut écrire $D = \{y_i^j : = 1, 2, \cdots, j \leq i\}$; D est dénombrablement infini et discret.

Chaque fonction réelle continue sur D peut se prolonger par une telle fonction sur X; en effet, soit $D = \{z_1, z_2, \cdots\}$, f une fonction réelle continue sur D, $f(z_i) = r_i$. Comme X est completement régulier, il existe des fonctions réelles continues f_i sur X telles que $f_i(z_i) = r_i$ et $f_i(X \sim M_i) = 0$. On

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

obtient une fonction continue sur X qui prolonge f en posant $g(y) = \sum_i f_i(y)$ pour $y \in X$.

Soit maintenant f une fonction continue sur D telle que $f(y_i^j) = j$ pour chaque i et $j \leq i$, et soit g un prolongement continu de f sur X. On montre alors que g ne peut être uniformément continue; ce qui contrédit une des hypothèses de la proposition. Pour montrer cela, supposons g uniformément continue. On peut donc trouver $V \in \mathfrak{U}$ tel que, pour chaque $A \subset X$ avec $A \times A \subset V$, le diamètre de l'image $g(A)$ soit inferieur à 1. Supposons maintenant que n est l'entier tel que, pour tout $x \in X$, $U[x]$ est la réunion de n sous-ensembles A. En considérant x_{n+1} et M_{n+1} on a $M_{n+1} \subset U[x_{n+1}] \subset$ la réunion de n sous-ensembles A. Cela entraîne, donc, que $g(M_{n+1})$, qui contient l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, est la réunion de n sous-ensembles de diamètre inférieur à 1, ce qui est impossible. Cette impossibilité achève la démonstration.

On dit qu'un groupe topologique est localement borné quand il existe un voisinage de l'identité qu'on peut récouvrir avec un nombre fini de translations d'un autre voisinage de l'identité. Un tel groupe topologique, avec la structure uniforme gauche, est un espace uniforme ULP et on a la généralisation suivante d'un Corollaire de Kister [3]. Il faut bien remarquer que ce corollaire est une conséquence d'un Théorème [2, Th. 4.1] de Comfort et Ross, qui ont fait un étude approfondi de la pseudocompacité des groupes topologiques.

COROLLAIRE. *Un groupe topologique non–discret et localement borné est pseudocompact si chaque fonction réelle continue sur celui–ci est uniformément continue.*

REFERENCES

[1] R. W. BAGLEY, E. H. CONNELL et J. D. MCKNIGHT, JR., *On properties characterizing pseudocompact spaces*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *9*, 500–506 (1958).

[2] W. W. COMFORT et K. A. ROSS, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, « Pacific J. Math. », *16*, 483–496 (1966).

[3] J. M. KISTER, *Uniform continuity and compactness in topological groups*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *13*, 37–40 (1962).