Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Froim Marcus

Surfaces réglées à groupes continus de transformations projectives-similaires en elles-mêmes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.6, p. 492–496.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_492_0>

Geometria. — *Surfaces réglées à groupes continus de transformations projectives–similaires en elles–mêmes.* Nota di FROIM MARCUS, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

A la mémoire de O. Mayer.

RIASSUNTO. — Si determinano le superfici rigate che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive simile, in sé, e quelle che ammettono traslazioni proiettive.

Soit $x(u, v)$ une surface non réglée et u, v les paramètres asymptotiques. Une transformation infinitésimale asymptotique de cette surface en elle–même est représentée par le symbole

$$X = k(u) \frac{\partial}{\partial u} + l(v) \frac{\partial}{\partial v},$$

ou par les équations

$$\bar{u} = u + \varepsilon k(u) \quad ; \quad \bar{v} = v + \varepsilon l(v), \tag{1}$$

ε étant un paramètre indépendant de u, v, dont on néglige le carré.

X est une transformation infinitésimale projective–conforme ou, tout court, t.i.p.–c., si les éléments linéaires de Fubini de la surface $x(u, v)$ et de sa transformée asymptotique vérifient au premier ordre la relation

$$\frac{\bar{\beta}\, d\bar{u}^3 + \bar{\gamma}\, d\bar{v}^3}{2\, d\bar{u}\, d\bar{v}} = \rho\, \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}, \tag{2}$$

ou

$$\rho = 1 + \varepsilon\sigma \tag{3}$$

avec σ une fonction non constante de u, v. Si σ se réduit à une constante $C \neq 0$, alors X est une transformation infinitésimale projective–similaire (t.i.p.–s).

C'est une généralisation d'une notion due à E. Bompiani.

Si $C = 0$, X est une *déformation projective de la surface en elle–même.*

Les surfaces réglées qui possèdent un groupe continu de déformations projectives en elles–mêmes ont été déterminées par G. Fubini dans son Mémoire « Fondamenti di Geometria proiettivo–differenziale » [1].

A différence des surfaces non réglées, il existe des surfaces réglées qui possèdent un groupe G_3 de déformations projectives en elles–mêmes, à savoir les réglées pour lesquelles on peut réduire β ou γ à une constante. Le groupe G_3 est engendré par les transformations réductibles à

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u} \quad ; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial v} \quad ; \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u} + 2v \frac{\partial}{\partial v}.$$

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

Dans [2] [3] et [4] on a étudié les t.i. projectives–similaires et projectives–conformes des surfaces non réglées en elles–mêmes. On a montré dans [4] que lorsque la surface est réglée ($\beta\gamma = 0$) sans être une quadrique, *alors toute transformation infinitésimale asymptotique est une t.i.p.–c.* Ce cas est donc peu intéressant.

Non pas ainsi pour les transformations infinitésimales projectives–similaires.

C'est pour ce motif que nous considérons ici les surfaces réglées qui possèdent un groupe continu de t.i.p.–s. en elles–mêmes.

Soit $x(u, v)$ une surface réglée avec $\beta \neq 0$. Les conditions d'intégrabilité qui déterminent les surfaces [1] deviennent alors

$$\text{(4)} \qquad L = \psi(u) \quad ; \quad M = V(v) = -\frac{\beta_{vv}}{\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)^2 + \frac{F(u)}{\beta^2} ;$$

ψ et F fonctions de u.

Si X est une t.i.p.–s. de la surface x en elle–même, alors il résulte de (2)

$$\text{(2')} \qquad \frac{\bar\beta\, d\bar u^3}{2\, d\bar u\, d\bar v} = (1 + \varepsilon C)\frac{\beta\, du^3}{2\, du\, dv}, \qquad (C \neq 0).$$

De (1) on tire alors

$$\text{(5)} \qquad k(\log\beta)_u + l(\log\beta)_v + 2k' - l' = C.$$

Supposons que la surface possède un groupe G_1 de t.i.p.–s. en elles–mêmes. On aura alors à considérer les sous–cas suivants:

I a) Le groupe est engendré par une transformation réductible à $X = \frac{\partial}{\partial V}$.

On pourra rendre $k = 0$, $l = 1$ et de (4) et (5) il résulte

$$(a) \qquad \beta = Ue^{Cv} \quad ; \quad L = \psi(u) \quad ; \quad M = C_1 e^{-2Cv} - \frac{C^2}{2}.$$

Donc:

Les surfaces réglées (a) possèdent un groupe G_1 *de t.i.p.–s. en elles–mêmes engendrées par une t.i. réductible à* $X = \frac{\partial}{\partial v}$.

I b) Groupe engendré par $X = \frac{\partial}{\partial u}$.

Dans ce cas on a les surfaces

$$(b) \qquad \beta = V(v)\,e^{Cu} \quad ; \quad L = \psi(u) \quad ; \quad M = -\frac{V''}{V} + \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + \frac{C_1}{V^2} \quad ; \quad \gamma = 0.$$

I c) Groupe engendré par $X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$.

De (5) nous avons $\beta = \varphi e^{Cv}$ avec φ fonction $\tau_1 = (u - v)$.

De (4) on a

$$(4') \qquad M = V(v) = -\frac{\varphi''}{\varphi} + C\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{C^2}{2} + \frac{F(u)}{\varphi^2} e^{-2Cv}.$$

Donc $\varphi^2 M - \frac{F}{e^{2Cv}}$ doit être une fonction de τ_1.

Par conséquent

$$(6) \qquad e^{2Cv} M' \varphi^2 = F' - 2CF = C_1 .$$

En opérant avec $\partial/\partial u$ sur (*b*) on a $M' \varphi\varphi' = 0$. Donc $M' \varphi' = 0$.

Si $\varphi' = 0$, alors nous avons les surfaces

$$(c) \qquad \beta = C_2 e^{Cv} \quad ; \quad M = -\frac{2 C_1 C}{C_2 e^{2Cv}} \quad ; \quad L = \psi(u).$$

Ces surfaces possèdent aussi un G_2 qui est engendré par $X_1 = \frac{\partial}{\partial v}$ et $X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$.

Si $\varphi' = M' = 0$, on obtient alors les surfaces

$$(c') \qquad \beta = C_2 e^{Cv} \quad ; \quad M = -\frac{C^2}{2} \quad ; \quad L = \psi(u),$$

qui possèdent, elles aussi, un groupe G_2 déterminé par la t.i. $\frac{\partial}{\partial v}$ et $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$.

Soit maintenant $\varphi' \neq 0$. Donc $M = h$ ($h =$ const.). Par suite $F = C_1 e^{2Cu}$ et l'on obtient les surfaces

$$(d) \qquad \beta = \varphi e^{Cv} \quad ; \quad M = h \quad ; \quad L = \psi(u),$$

avec $\varphi(\tau_1)$ solution de l'équation différentielle

$$(7) \qquad \varphi'' - \frac{\varphi'^2}{\varphi} - C\varphi' + \frac{C^2}{2}\varphi - C_2 \frac{e^{2\varphi}}{\varphi} + h\varphi = 0 .$$

Les surfaces réglées qui possèdent un groupe G_2 *de t.i.p.–s.*

II a) Groupe G_2 à t.i.p.–s. permutables.

Le groupe peut être supposé de type $X = \frac{\partial}{\partial u}$; $X = \frac{\partial}{\partial v}$. Dans ce cas on trouve les surfaces

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\beta = e^{C\tau}, \qquad\qquad (\tau = u + v), \\ &M = -\frac{1}{2} C^2 + \frac{C_1}{e^{Cv}} \quad ; \quad L = \psi(u). \end{aligned}$$

II b) Le groupe G_2 est engendré par deux transformations X_1, X_2 tel que $(X_1 X_2) = X_1$.

Les transformations infinitésimales sont réductibles à

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial v} \quad ; \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} \qquad \text{ou à} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial v} \quad ; \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}.$$

De (5) il résulte:

$$(9) \qquad (\log \beta)_v = C \quad ; \quad u (\log \beta)_u + v (\log \beta)_v = C - 1 .$$

Soit d'abord $C = 1$. De (9) on tire $\beta = e^{U+v}$ avec $uU'(u) + v = 0$, ce qui est impossible. Le cas $(X_1 X_2) = X_2$ est aussi impossible. Supposons donc $C \neq 1$. Mais dans ce cas aussi on ne peut pas avoir $(X_1 X_2) = X_1$ ou $(X_1 X_2) = X_2$, car de (9) on aura $\beta = U e^{Cv}$ avec

$$u \frac{U'}{U} + vC = C - 1 ,$$

relation incompatible avec la condition $C \neq 0$.

II c) Le groupe G_2 est engendré par les transformations réductibles à $X_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ et $X_2 = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$.

De (5) on tire

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(\log \beta)_u + (\log \beta)_v = C , \\ &u (\log \beta)_u + v (\log \beta)_v = C - 1 . \end{aligned}$$

Soit $C = 1$. De (9) il résulte $\beta = e^f$, avec f fonction de $\tau = \frac{u}{v}$ qui doit satisfaire à l'équation $f'(1 - \tau) = v$. En opérant avec $\partial/\partial u$ il résulte $f'(1 - \tau) = C_1$ ce qui n'est pas possible. Donc $C \neq 1$ et l'on a

$$(11) \qquad (\log \beta)_u = \frac{C(v-1)+1}{v-u} \quad ; \quad (\log \beta)_v = \frac{C(1-u)-1}{v-u} .$$

D'où:

$$(11) \qquad (\log \beta)_{uv} = \frac{C(1-u)-1}{(v-u)^2} \quad ; \quad (\log \beta)_{vu} = \frac{C(1-v)-1}{(v-u)^2}$$

qui ne peut avoir lieu que si $C = 0$.

Nous avons donc le résultat suivant:

Les surfaces (8) *sont les seules surfaces réglées qui possèdent un groupe continu* G_2 *de t.i.p.-s. en elles-mêmes.*

Pour trouver les surfaces réglées qui possèdent un groupe à trois ou plus paramètres il est suffisant de chercher le plus ample groupe admis par les surfaces (8).

En posant $\beta =$ const. dans (5) il résulte alors $2k' - l' = C$, c'est-à-dire:

$$(13) \qquad k = au + b_1 \quad ; \quad l = (2a - C) v + b_2 .$$

Donc *les surfaces réglées avec* $\beta =$ const. *et elles seules admettent un* G_3 *de t.i.p.-s. en elles-mêmes.*

Translations projectives des surfaces réglées.

Selon Bortolotti [5] *une translation projective d'une surface non réglée en elle-même est une déformation projective proprement dite dans laquelle les points de la surface parcourent des distances infinitésimales, de longueurs* *projectives égales dans la métrique définie par l'élément linéaire projectif de Fubini.* Dans [5] nous avons donné une caractérisation géométrique de la translation projective d'une surface non réglée en elle–même, ce qui nous a permis de déterminer toutes les surfaces qui possèdent des translations projectives en elles–mêmes.

Nous considérons maintenant le même problème pour les surfaces réglées.

Soit X une déformation projective d'une surface réglée en elle–même. Mettant $C = 0$ dans (2') on tire de (5)

$$k (\log \beta)_u + l (\log \beta)_v + 2 k' - l' = 0, \tag{5'}$$

et les trajectoires du groupe sont $\frac{du}{k} = \frac{dv}{l}$.

Le déplacement infinitésimal du point x calculé dans la métrique définie par l'élément linéaire de Fubini est (pour $du = 2 \varepsilon k$; $dv = 2 \varepsilon l$),

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{\varepsilon \beta k^2}{l}. \tag{14}$$

Le déplacement est constant si

$$2 k' + k (\log \beta)_u = 0 \quad ; \quad l' - l (\log \beta)_v = 0. \tag{15}$$

Les surfaces réglées qui admettent des translations projectives se trouvent parmi celles qui possèdent un groupe de déformations projectives en elles–mêmes et qui ont été déterminées par Fubini [1].

En excluant, comme banales, les translations projectives engendrées par les t.i. $X = \frac{\partial}{\partial v}$, car dans ce cas le déplacement est nul, il résulte que les seules surfaces réglées qui possèdent un groupe de translations projectives non banales en elles–mêmes s'obtiennent avec

$$\beta = \text{const.} \quad ; \quad L = \psi (u) \quad ; \quad M = \text{const}, \tag{16}$$

et le groupe est engendré par la transformation infinitésimale réductible à $X = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$.

Donc les surfaces réglées peuvent posséder tout au plus un groupe G_1 *de translations projectives non banales en elles–mêmes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. FUBINI, *Fondamenti di geometria proiettivo–differenziale.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », *43*, 1–46 (1919).

[2] F. MARCUS, *Asupra suprafețelor ce admit deformații infinitezimale proiectiv–simile.* « Studii și cerc. șt., Matematică, Iași », *12*, 291–319 (1961).

[3] F. MARCUS, *Asupra deformărilor infinitezimale proiectiv–conforme ale unei suprafețe în ea însăși.* Ibidem, *13*, 109–128 (1962).

[4] O. MAYER et F. MARCUS, *Surfaces à groupes continus de transformations projectives conformes en elles–mêmes.* « An. șt. Univ. Iași », *9*, 387–408 (1963).

[5] F. MARCUS, *Cîteva contribuții la proprietățile proiective ale deformărilor infinit mici ale unei suprafețe în ea însăși.* « Stud. și cerc. șt., Matematică, Iași », *12* (1), 69–94 (1961).