
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

VINCENZO DICUONZO

**Sulla rappresentazione di piani metrici finiti di tipo
iperbolico su rette proiettive**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.6, p. 486–491.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_486_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sulla rappresentazione di piani metrici finiti di tipo iperbolico su rette proiettive* (*). Nota di VINCENZO DICUONZO, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — The purpose of this paper is the construction of models of finite metric planes of hyperbolic type on projective lines by involutions and their transformations; in this way we obtain a subdivision of these planes into two classes.

In questa Nota, mediante i sistemi delle involuzioni su rette proiettive, si costruiscono dei modelli dei piani metrici finiti di tipo iperbolico, cioè dei piani metrici che si ottengono dai piani proiettivi, costruiti su campi di caratteristica maggiore di 2, fissando come assoluto una polarità, la quale, come è noto, può essere soltanto iperbolica. Si ottiene in tal modo una suddivisione dei suddetti piani metrici in due classi, ciascuna delle quali è caratterizzata da due diversi tipi di triangoli trirettangoli o autopolari.

Sia r una retta appartenente ad un piano proiettivo π costruito su un campo di caratteristica > 2 . Se π è di ordine $q = p^h$, dove p è un numero primo > 2 e h è un intero positivo, su r esistono q^2 involuzioni, delle quali $\frac{1}{2}q(q+1)$ sono iperboliche e $\frac{1}{2}q(q-1)$ sono ellittiche.

Infatti, poiché su r ci sono $q+1$ punti, scelti su r tre punti distinti A, B, C , si hanno q involuzioni per le quali A è unito e a B è associato un punto $P \neq A$, inoltre $q-1$ involuzioni le quali ad A associano B e a C un punto $P \neq A, B$, e infine $(q-1)^2$ involuzioni, le quali associano ad A un punto $P \neq A, B$ e a B un punto $Q \neq A, P$. Si hanno così in tutto q^2 involuzioni su r ; poiché $\frac{1}{2}q(q+1)$ è il numero di coppie non ordinate di punti di r , le involuzioni iperboliche su r sono $\frac{1}{2}q(q+1)$ e quelle ellittiche sono quindi $\frac{1}{2}q(q-1)$.

Fissata ora una polarità su π , si ha un piano metrico $\bar{\pi}$ di tipo iperbolico, del quale si può costruire un modello su r nel modo seguente.

Come rette del modello, o *pseudorette*, si assumono le q^2 involuzioni su r . Una *pseudoretta* viene chiamata *secante* o *esterna*, secondo che l'involuzione immagine sia iperbolica o ellittica. Come punti del modello, o *pseudopunti*, si assumono i fasci di involuzioni permutabili con una stessa involuzione su r : secondo che questa sia iperbolica o ellittica, gli *pseudopunti* vengono detti *ideali* o *propri*.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1971.

Poiché ognuno dei suddetti fasci di involuzioni è individuato da due involuzioni, la *relazione di appartenenza tra pseudorette e pseudopunti* si esprime come *appartenenza ad uno stesso fascio di tre involuzioni su r* , per cui il prodotto di queste è una involuzione dello stesso fascio.

Per ogni pseudopunto ideale P passano $q - 1$ pseudorette, delle quali $\frac{1}{2}(q - 1)$ sono secanti e $\frac{1}{2}(q - 1)$ sono esterne.

Infatti, se i è l'involuzione iperbolica associata a P, i , oltre la coppia di punti uniti, possiede $\frac{1}{2}(q - 1)$ coppie di punti corrispondenti, ognuna delle quali costituisce la coppia di punti uniti di una involuzione iperbolica permutabile con i ; inoltre la coppia di punti uniti di i e un'altra qualunque coppia di punti corrispondenti di i individuano una involuzione ellittica permutabile con i .

Per ogni pseudopunto proprio P passano $q + 1$ pseudorette, delle quali $\frac{1}{2}(q + 1)$ sono secanti e $\frac{1}{2}(q + 1)$ sono esterne.

Sia j l'involuzione ellittica su r , associata a P ; j possiede $\frac{1}{2}(q + 1)$ coppie di punti corrispondenti. Se $\frac{1}{2}(q + 1)$ è dispari, si hanno $\frac{1}{2}(q + 1)$ involuzioni iperboliche permutabili con j e $\frac{1}{2}(q + 1)$ involuzioni ellittiche permutabili con j , aventi in comune con j una coppia di punti corrispondenti e le altre coppie di punti corrispondenti coniugate a coppie. Se $\frac{1}{2}(q + 1)$ è pari, sia (A, B) una coppia di punti corrispondenti di j : la coppia (A, B) può essere una coppia di punti uniti di una involuzione iperbolica i permutabile con j , oppure (A, B) è la coppia comune a j e ad una involuzione iperbolica permutabile con j , o infine la coppia (A, B) insieme con un'altra coppia dà luogo in due modi a due nuove coppie di punti corrispondenti, le quali individuano due involuzioni permutabili con j . Perciò esistono $q + 1$ involuzioni permutabili con j , delle quali $\frac{1}{2}(q + 1)$ sono ovviamente iperboliche.

Dato un punto A su r , esistono q involuzioni iperboliche, aventi come punto unito A , le quali formano un fascio, ma non sono tutte permutabili con una stessa involuzione su r : in tal caso le *pseudorette* corrispondenti vengono dette *parallele* e il suddetto fascio viene detto *pseudopunto improprio*. Poiché una involuzione iperbolica ha due punti uniti, si ha che *rispetto ad una pseudoretta secante s ci sono due fasci di pseudorette parallele ad s* , ciascuno dei quali contiene, oltre s , $q - 1$ pseudorette. È ovvio che *non si ha la relazione di parallelismo tra pseudorette esterne*.

I prodotti di due involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio formano un gruppo abeliano.

Per questa proprietà basta dimostrare la commutatività del prodotto. Se a, b, c, d sono involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio, per la proprietà riguardante il prodotto di tre involuzioni di uno stesso fascio si ha: $(ab)(cd) = (abc)d = (cba)d = c(bad) = c(dab) = (cd)(ab)$.

Secondo che i fasci di involuzioni rappresentino pseudopunti propri, ideali o impropri, si hanno tre diversi gruppi.

Di notevole importanza è l'esame delle *terne di involuzioni su r , permutabili a due a due*.

Se $\frac{1}{2}(q+1)$ è dispari, due involuzioni ellittiche permutabili hanno in comune una coppia (A, B) di punti corrispondenti, perciò il loro prodotto è l'involuzione iperbolica, avente per punti uniti A e B; consegue che il prodotto di due involuzioni permutabili di tipo diverso è una involuzione ellittica e che il prodotto di due involuzioni iperboliche permutabili è ancora una involuzione iperbolica.

Se $\frac{1}{2}(q+1)$ è pari, due involuzioni permutabili di tipo diverso hanno una coppia in comune e perciò il loro prodotto è una involuzione iperbolica; consegue immediatamente che il prodotto di due involuzioni iperboliche permutabili è una involuzione ellittica e il prodotto di due involuzioni ellittiche permutabili è ancora una involuzione ellittica.

La relazione di *perpendicolarità tra pseudorette* viene definita come *permutabilità tra involuzioni su r* . L'esistenza di *terne di involuzioni a due a due permutabili* significa quindi *esistenza di triangoli* (cioè terne di punti non allineati) *trirettangoli*. Se $\frac{1}{2}(q+1)$ è dispari, i triangoli trirettangoli sono di due tipi, in quanto è dispari il numero dei lati appartenenti a pseudorette secanti; se $\frac{1}{2}(q+1)$ è pari, i triangoli trirettangoli sono di altri due tipi, in quanto è dispari il numero dei lati appartenenti a pseudorette esterne.

In tal modo si hanno *due classi di piani metrici finiti di tipo iperbolico secondo che $\frac{1}{2}(q+1)$ sia dispari o pari*.

In corrispondenza di ogni triangolo trirettangolo si ha un gruppo quadrimio formato dall'identità e dalle involuzioni immagini delle pseudorette a cui appartengono i lati del triangolo.

Per la definizione data di pseudopunto ideale o proprio si ha che le pseudorette passanti per un siffatto pseudopunto S risultano perpendicolari ad una stessa pseudoretta s , che viene chiamata *polare* di S, mentre S viene detto *polo* di s .

Calcoliamo ora il *numero di pseudopunti appartenenti ad una pseudoretta s* . Supponiamo prima che s sia esterna: sappiamo che esistono $q+1$ pseudorette perpendicolari ad s , in quanto sono $q+1$ le involuzioni permutabili con una involuzione ellittica. Queste $q+1$ pseudorette sono suddivise in coppie di pseudorette perpendicolari; la pseudoretta s , con ciascuna delle suddette $q+1$ pseudorette, individua uno pseudopunto A appartenente alla pseudoretta s e a q pseudorette se A è proprio, oppure appartenente alla pseudoretta s e a $q-2$ pseudorette se A è ideale. Oltre la pseudoretta s si hanno così $\frac{1}{2}q(q+1) + \frac{1}{2}(q+1)(q-2) = q^2 - 1$ pseudorette diverse dalla pseudoretta s . Perciò alla pseudoretta s appartengono $q+1$ pseudopunti, dei quali $\frac{1}{2}(q+1)$ sono propri e $\frac{1}{2}(q+1)$ sono ideali.

Se s è una pseudoretta secante, ad essa appartengono due pseudopunti impropri, per i quali passano, oltre la pseudoretta s , $q - 1$ pseudorette; inoltre ci sono $q - 1$ pseudorette perpendicolari ad s , suddivise in coppie di pseudorette perpendicolari tra loro. Ragionando come prima si hanno complessivamente, oltre la pseudoretta s , $2(q - 1) + \frac{1}{2}q(q - 1) + \frac{1}{2}(q - 1)(q - 2) = q^2 - 1$ pseudorette, cioè tutte le pseudorette diverse dalla pseudoretta s . Perciò ad s appartengono $q + 1$ pseudopunti, dei quali 2 impropri, $\frac{1}{2}(q - 1)$ propri e $\frac{1}{2}(q - 1)$ ideali.

Circa la struttura di incidenza del modello così costruito si vede facilmente che due pseudorette distinte x e y individuano uno pseudopunto proprio, ideale o improprio, secondo che x e y siano perpendicolari ad una stessa pseudoretta esterna o secante, oppure siano parallele.

Dati invece due pseudopunti distinti A e B , può mancare la pseudoretta passante per essi. Infatti non esiste una pseudoretta per due pseudopunti ideali A e B , i quali siano poli di due pseudorette parallele, in quanto non esiste una involuzione permutabile con due involuzioni iperboliche aventi in comune un punto unito. Analogamente manca la pseudoretta per uno pseudopunto improprio A e per uno pseudopunto ideale B , polo di una pseudoretta per A .

Negli altri casi, dati due pseudopunti distinti A e B , esiste una ben determinata pseudoretta passante per A e B . Infatti, se A è proprio, per A passano $q + 1$ pseudorette e quindi esiste sempre una pseudoretta per A e per ogni pseudopunto di una pseudoretta per B . Se A e B sono entrambi ideali e sono poli di due pseudorette secanti non parallele, poiché queste sono rappresentate da due involuzioni iperboliche i e j non aventi alcun punto unito in comune, esiste una ben determinata involuzione individuata dalle coppie di punti uniti di i e j e quindi permutabile con esse, cioè esiste una pseudoretta passante per A e B . Se infine A e B sono due pseudopunti impropri distinti, cioè due fasci di involuzioni iperboliche aventi in comune un punto unito, poiché esiste l'involuzione iperbolica avente come punti uniti i punti uniti comuni dei due fasci, esiste la pseudoretta secante passante per A e B .

Perché il modello costruito abbia la struttura di incidenza di un piano proiettivo-metrico iperbolico, con una opportuna definizione bisogna introdurre delle nuove pseudorette.

Dato uno pseudopunto improprio S , si definisce *pseudoretta isotropa* $[s]$ associata ad S , l'insieme contenente S e i poli delle pseudorette per S . Su ogni pseudoretta isotropa ci sono quindi q pseudopunti ideali ed uno pseudopunto improprio.

Con questa definizione si ha che due pseudopunti distinti appartengono ad una ben determinata pseudoretta.

Le pseudorette isotrope sono $q + 1$, come $q + 1$ sono gli pseudopunti impropri. Infatti per un tale pseudopunto S passano q pseudorette secanti aventi ciascuna un altro pseudopunto improprio diverso da S .

In tal modo le pseudorette sono complessivamente $q^2 + q + 1$, come anche tutti gli pseudopunti sono $q^2 + q + 1$.

Mentre per uno pseudopunto improprio passa una pseudoretta isotropa, per uno pseudopunto ideale A passano invece due pseudorette isotrope: infatti la polare di A contiene due pseudopunti impropri, ai quali sono associate due pseudorette isotrope contenenti A .

Un semplice calcolo permette di affermare che una pseudoretta isotropa e un'altra qualunque individuano uno pseudopunto che può essere improprio o ideale.

Dalla definizione di *pseudoretta isotropa* consegue che le polari degli pseudopunti ideali di una siffatta pseudoretta $[s]$ passano per lo pseudopunto improprio di $[s]$; possiamo così affermare che $[s]$ contiene il proprio polo cioè $[s]$ è *perpendicolare a se stessa*.

Indicato ora con $\bar{G}$ il gruppo delle proiettività su r , se i è una involuzione di $\bar{G}$, indichiamo con il simbolo σ_i l'automorfismo involutivo interno di $\bar{G}$ associato ad i . Poiché il prodotto di tre involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio $\mathfrak{F}$ è una involuzione di $\mathfrak{F}$, mediante σ_i involuzioni si trasformano in involuzioni dello stesso tipo, dato che si conserva la permutabilità tra involuzioni e inoltre restano unite le involuzioni permutabili con i , cioè, mediante σ_i , pseudorette si mutano in pseudorette dello stesso tipo, oltre i restano unite le pseudorette perpendicolari ad i e si conservano la perpendicolarità e l'appartenenza; perciò pseudopunti si mutano in pseudopunti dello stesso tipo, e restano uniti gli pseudopunti di i e il polo di i .

L'automorfismo interno σ_i viene chiamato pseudosimmetria assiale.

Dicesi *pseudomovimento* ogni prodotto di pseudosimmetrie assiali cioè ogni automorfismo interno di $\bar{G}$.

Dimostriamo ora che ogni elemento del gruppo G degli pseudomovimenti si può esprimere come prodotto di due pseudosimmetrie assiali.

Siano a, b, c, d quattro pseudorette non isotrope e P uno pseudopunto proprio. Indicata con f la pseudoretta del fascio $\mathfrak{F}(a, b)$ passante per P , si ha: $fab = g$, cioè $ab = fg$; analogamente $gc = hj$, con h per P , e infine $jd = km$, con k per P . Risulta quindi $abcd = fgcd = fhjd = fhkm = nm$, poiché f, h, k appartengono allo stesso fascio. Passando agli automorfismi interni di $\bar{G}$ associati ad a, b, c, d , si ha che il prodotto di quattro pseudosimmetrie assiali si riduce al prodotto di due pseudosimmetrie assiali e quindi il prodotto di cinque pseudosimmetrie assiali si riduce al prodotto di tre pseudosimmetrie assiali, le prime due delle quali hanno gli assi passanti per uno pseudopunto proprio.

Siano ora a, b, c tre pseudorette: possiamo già supporre che a e b passino per uno pseudopunto proprio P . Indicata con d la pseudoretta per P e per il polo di c , si ha: $abc = abdc = fg$, dove $f = abd$ e $g = dc$, essendo $d \perp c$. Poiché ogni involuzione j di G si può esprimere come prodotto di due involuzioni permutabili tra loro e con j , si ha che ogni elemento di $\bar{G}$ si può esprimere come prodotto di due involuzioni. Passando alle pseudosimmetrie si

ha che ogni pseudomovimento si può rappresentare come prodotto di due pseudosimmetrie assiali.

Possiamo aggiungere che di queste due pseudosimmetrie una almeno può essere rispetto ad una pseudoretta secante.

Sia, infatti, $\alpha \in \bar{G}$, cioè sia α il prodotto di due involuzioni a e b ; se c è una involuzione iperbolica (sempre esistente) formante fascio con a e b , risulta $abc = d$, cioè $ab = dc$.

BIBLIOGRAFIA

- V. DICUONZO, *Su una classe di piani metrici regolari a debole struttura di incidenza*, I. « Rendiconti di Matematica » (6), 3, 729-753 (1970).
- V. DICUONZO, *Su una classe di piani metrici regolari a debole struttura di incidenza*, II. « Rendiconti di matematica » (6), 4, 37-54 (1971).
- V. DICUONZO, *Sulla rappresentazione del piano iperbolico e del piano di De Sitter su una retta reale proiettiva*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Vol. LI, fasc. 3-4 (ferie 1971).