Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Pia Colautti

Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.6, p. 477–485.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_6_477_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori di un problema ai limiti.* Nota I di MARIA PIA COLAUTTI (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — The eigenvalue problem (1) is considered and for any eigenvalue λ_h an increasing sequence $\lambda_h^{(n)}$ converging to λ_h is constructed. The approximation error $\lambda_h - \lambda_h^{(n)}$ is estimated. The $\lambda_h^{(n)}$ are obtained as eigenvalues of a differential equation with piecewise constant coefficients.

Si consideri il problema di autovalori:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E}(u) + \lambda u = 0 \quad , \quad u(0) = u(1) = 0 \, ,$$

essendo $\mathrm{E}(u) \equiv \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{du}{dx}\right] - c(x)\,u$ e $\theta(x)$ e $c(x)$ funzioni reali, rispettivamente appartenenti a $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$ e a $\mathcal{C}^{(0)}[0,1]$. $\theta(x)$ è supposta sempre positiva in $[0,1]$ e $c(x)$ non negativa. Tali ipotesi su $\theta(x)$ e $c(x)$ saranno sempre mantenute in questa e nelle successive due Note.

In una recente Nota (1) ho studiato il problema consistente nell'ottenere approssimazioni per eccesso di taluni invarianti ortogonali connessi con il problema di autovalori (1). Ciò permette di applicare il metodo degli invarianti ortogonali per il calcolo per difetto degli autovalori del suddetto problema (2).

Nel presente lavoro desidero ritornare sul problema di autovalori (1) per esporre due diversi procedimenti, indipendenti da quelli da me considerati nel su menzionato lavoro, mediante i quali si perviene al calcolo per difetto degli autovalori di (1).

Il primo di essi non si avvale del metodo degli invarianti ortogonali. Esso consiste nell'«approssimare» il problema (1) mediante un problema i cui autovalori sono minoranti rispetto ai corrispondenti autovalori del problema (1) e sono, inoltre, tali da essere gli zeri di una trascendente costruibile *esplicitamente* in corrispondenza ad ogni approssimazione n-esima. Tale trascendente è rappresentata da un determinante di ordine $2n$ i cui elementi sono semplici funzioni elementari. Si prova che il calcolo della detta trascendente può ricondursi al calcolo di un determinante di ordine n e, successi-

(*) Facoltà di Ingegneria dell'Università di Palermo.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1971.

(1) M. P. COLAUTTI. *Formule di maggiorazione per taluni invarianti ortogonali connessi con il calcolo rigoroso degli autovalori di un problema ai limiti.* Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste. Vol. IV, fasc. I (1972).

(2) Cfr. G. FICHERA. *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathem. N. 8, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

vamente si forniscono delle formule ricorrenti utili alla valutazione numerica di tale determinante.

Un opportuno teorema di convergenza prova che il procedimento fornisce valori approssimati, tanto quanto si vuole, degli autovalori del problema.

Sotto l'ulteriore ipotesi che la funzione $c(x)$ sia lipschitziana in $[0, 1]$, si ottiene una formula di maggiorazione dell'errore con dipendenza esplicita dall'intero n, ordine del problema approssimante. Pertanto, il primo procedimento fornisce valutazioni per difetto e per eccesso degli autovalori di (1).

Il secondo procedimento si avvale sempre degli stessi « problemi approssimanti » ma, anziché ricercare gli zeri di una funzione trascendente, riconduce l'approssimazione per difetto degli autovalori del problema (1) al calcolo, *esplicitamente* eseguibile, degli invarianti ortogonali relativi al problema approssimante.

Un opportuno teorema di convergenza dimostra che anche il secondo procedimento fornisce valori approssimati, tanto quanto si vuole, degli autovalori del problema (1).

È bene notare che i procedimenti descritti in questo lavoro possono facilmente estendersi a problemi di autovalori più generali del problema (1). Ad esempio, al problema relativo alla medesima equazione $E(u) + \lambda u = 0$ nel quale, invece delle condizioni ai limiti $u(0) = u(1) = 0$, si considerino le più generali condizioni ai limiti:

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0 \quad , \quad \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0 ,$$

dove α_1, β_1 e α_2, β_2 sono costanti verificanti opportune condizioni.

1. – Un teorema sull'approssimazione per difetto dei primi ν autovalori del problema (1).

Sia U la classe delle funzioni $u(x)$, nulle agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$, ivi dotate di derivata prima assolutamente continua e aventi derivata seconda appartenente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$.

Come è classicamente noto, il problema di autovalori (1), cioè il problema:

$$E(u) + \lambda u = 0 \quad , \quad u \in U , \tag{2}$$

ammette una successione di autovalori positivi. Ripetuto ciascun autovalore tante volte quant'è la sua molteplicità geometrica (finita), la successione, che denoteremo con $\{\lambda_k\}$, è non decrescente e diverge positivamente (cfr. loc. cit. [1]).

Indichiamo con $H_1(0, 1)$ lo spazio hilbertiano delle funzioni $u(x)$, assolutamente continue in $[0, 1]$, e dotate di derivata prima appartenente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$. Con $\mathring{H}_1(0, 1)$ indicheremo la varietà lineare di $H_1(0, 1)$, costituita dalle funzioni $u(x)$ che si annullano agli estremi dell'intervallo.

Indichiamo con $R(u)$ il funzionale di Ritz associato al problema $E(u) + \lambda u = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, cioè il funzionale così definito in $\overset{\circ}{H}_1(0, 1)$, $(u \not\equiv 0)$:

$$R(u) = \frac{\int_0^1 \theta(x) \left[\frac{du}{dx}\right]^2 dx + \int_0^1 c(x) u^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

È classicamente noto, per il principio di massimo-minimo, che gli autovalori del problema (2) sono dati da:

$$\lambda_h = \max \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} R(u), \tag{3}$$

dove $p_1, \cdots, p_{h-1}$ denotano $h - 1$ arbitrarie funzioni di $\mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$ ed il simbolo $\min\limits_{u \perp p_i} R(u)$ indica che il minimo di $R(u)$ viene considerato nel sottospazio di $\overset{\circ}{H}_1(0, 1)$ costituito dalle funzioni u tali che $\int_0^1 u p_i \, dx = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, h - 1)$.

Se $h = 1$, il minimo di $R(u)$ va inteso in $\overset{\circ}{H}_1(0, 1)$ e, quindi, non si considera il massimo al variare di $p_1, \cdots, p_{h-1}$ in $\mathfrak{L}^{(2)}(0, 1)$.

Sia $\theta_1^{(1)}$ il minimo di $\theta(x)$ in $[0, 1]$. Siano $\tilde{\theta}(x)$ e $\tilde{c}(x)$ due funzioni, misurabili e limitate in $[0, 1]$, ivi verificanti le:

$$0 < \theta_1^{(1)} \leq \tilde{\theta}(x) \leq \theta(x) \quad , \quad 0 \leq \tilde{c}(x) \leq c(x).$$

Poniamo, per u appartenente ad $\overset{\circ}{H}_1(0, 1)$, $(u \not\equiv 0)$:

$$\tilde{R}(u) = \frac{\int_0^1 \tilde{\theta}(x) \left[\frac{du}{dx}\right]^2 dx + \int_0^1 \tilde{c}(x) u^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}$$

e per $h = 1, 2, \cdots$:

$$\tilde{\lambda}_h = \max \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} \tilde{R}(u).$$

Essendo, per ogni u, $\tilde{R}(u) \leq R(u)$, risulta intanto, evidentemente, quale si sia l'intero positivo h:

$$\tilde{\lambda}_h \leq \lambda_h.$$

Proviamo che:

I. *Fissato l'intero positivo* ν *ed il numero positivo* ε, *siano* σ *e* τ *due numeri non negativi tali che*:

$$\sigma\lambda_\nu + \tau\theta_1^{(1)} \leq \varepsilon\theta_1^{(1)}. \tag{4}$$

Se si ha, in $[0, 1]$:

(5) $$\theta(x) - \tilde{\theta}(x) \leq \sigma \quad , \quad c(x) - \tilde{c}(x) \leq \tau ,$$

risulta:

(6) $$\lambda_h - \tilde{\lambda}_h \leq \varepsilon \qquad (h = 1, \cdots, \nu).$$

Poniamo

$$\mathrm{I}(u) = \int_0^1 \theta(x) \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)\, u^2\, \mathrm{d}x$$

e

$$\tilde{\mathrm{I}}(u) = \int_0^1 \tilde{\theta}(x) \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \tilde{c}(x)\, u^2\, \mathrm{d}x .$$

Sia $\tilde{u}_h(x)$ la funzione di $\mathring{\mathrm{H}}_1(0, 1)$ tale che:

$$\int_0^1 \tilde{u}_h\, \mathrm{d}x = 1 \quad , \quad \tilde{u}_h \perp p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, h-1),$$

e

$$\tilde{\mathrm{I}}(\tilde{u}_h) = \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} \frac{\displaystyle\int_0^1 \tilde{\theta}(x) \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \tilde{c}(x)\, u^2\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 u^2\, \mathrm{d}x} .$$

Si ha:

$$\mathrm{I}(u_h) - \tilde{\mathrm{I}}(\tilde{u}_h) = \int_0^1 (\theta(x) - \tilde{\theta}(x)) \left[\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 (c(x) - \tilde{c}(x))\, \tilde{u}_h^2\, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \sigma \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_h}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \tau \leq \sigma \left\{ \frac{1}{\theta_1^{(1)}} \int_0^1 \tilde{\theta}(x) \left[\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_h}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\theta_1^{(1)}} \int_0^1 \tilde{c}(x)\, \tilde{u}_h^2\, \mathrm{d}x \right\} + \tau \leq$$

$$\leq \sigma \frac{\lambda_h}{\theta_1^{(1)}} + \tau \leq \sigma \frac{\lambda_\nu}{\theta_1^{(1)}} + \tau \leq \varepsilon .$$

Sia $u_h(x)$ la funzione di $\mathring{\mathrm{H}}_1(0, 1)$ tale che:

$$\int_0^1 u_h^2\, \mathrm{d}x = 1 \quad , \quad u_h \perp p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, h-1)$$

e:

$$\mathrm{I}(u_h) = \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} \frac{\int_0^1 \theta(x) \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)\, u^2\, \mathrm{d}x}{\int_0^1 u^2\, \mathrm{d}x}.$$

Riesce allora: $\mathrm{I}(u_h) \leq \mathrm{I}(\tilde{u}_h) \leq \tilde{\mathrm{I}}(\tilde{u}_h) + \varepsilon$.
Posto:

$$\tilde{\mu}_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) = \tilde{\mathrm{I}}(\tilde{u}_h) \quad , \quad \mu_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) = \mathrm{I}(u_h),$$

abbiamo quindi, quali si siano $p_1, \cdots, p_{h-1}$:

$$\mu_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) \leq \tilde{\mu}_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) + \varepsilon$$

e, pertanto:

$$\lambda_h = \max \mu_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) \leq \max \tilde{\mu}_h(p_1, \cdots, p_{h-1}) + \varepsilon = \tilde{\lambda}_h + \varepsilon.$$

Donde:

$$0 \leq \lambda_h - \tilde{\lambda}_h \leq \varepsilon \qquad (h = 1, 2, \cdots, \nu),$$

cioè la tesi.

Considereremo decomposizioni dell'intervallo $[0, 1]$, in intervalli parziali mediante i punti $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$. Se una tale decomposizione viene indicata con $\mathfrak{D}$, diremo che $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \cdots, n$, è il k–esimo intervallo della $\mathfrak{D}$. Chiameremo norma di $\mathfrak{D}$, il massimo dei numeri $x_{k+1} - x_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Se $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$ sono due decomposizioni dell'intervallo $[0, 1]$ in intervalli parziali, diremo che $\mathfrak{D}'$ è *successiva* a $\mathfrak{D}$ se essa si ottiene da $\mathfrak{D}$ decomponendo ulteriormente almeno un intervallo di $\mathfrak{D}$.

Indichiamo con $\{\mathfrak{D}_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ una successione di decomposizioni dell'intervallo $[0, 1]$ la quale goda delle seguenti proprietà:

1) $\mathfrak{D}_n$ è costituita da n intervalli;

2) $\mathfrak{D}_{n+1}$ è successiva a $\mathfrak{D}_n$;

3) La norma δ_n di $\mathfrak{D}_n$ tende a zero al divergere di n.

Ad esempio, si potrebbe scegliere $\{\mathfrak{D}_n\}$ al modo seguente: $\mathfrak{D}_1$ è la decomposizione che ha come unico intervallo $[0, 1]$; $\mathfrak{D}_2$ è la decomposizione di $[0, 1]$ in due intervalli uguali; $\mathfrak{D}_3$ è ottenuta da $\mathfrak{D}_2$ decomponendo in due parti uguali il primo intervallo di $\mathfrak{D}_2$; $\mathfrak{D}_4$ è ottenuta da $\mathfrak{D}_2$ decomponendo sia il primo che il secondo intervallo di $\mathfrak{D}_2$ in due parti uguali.

Così $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$, $\mathfrak{D}_7$ e $\mathfrak{D}_8$ si ottengono ordinatamente da $\mathfrak{D}_4$ decomponendo in due parti uguali il primo intervallo di $\mathfrak{D}_4$, per ottenere $\mathfrak{D}_5$, il primo e il secondo per ottenere $\mathfrak{D}_6$, il primo, il secondo e il terzo per ottenere $\mathfrak{D}_7$ e, infine tutti e quattro gli intervalli di $\mathfrak{D}_4$ per avere $\mathfrak{D}_8$; etc. Evidentemente, così procedendo, per valori di n tali che $n = 2^{r-1}$ $(r = 1, 2, 3, \cdots)$ l'intervallo $[0, 1]$ è decomposto in $n = 2^{r-1}$ parti uguali e $\delta_n = \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{n}$.

Se risulta $2^{r-1} \leq n < 2^r$, gli n intervalli di $\mathfrak{D}_n$ hanno, al più, lunghezza $1/2^{r-1}$ e, pertanto, la norma δ_n di tali decomposizioni $\mathfrak{D}_n$ è $\delta_n = 2^{1-r}$.

Poniamo:

$$\theta_k^{(n)} = \min_{[x_k, x_{k+1}]} \theta(x) \quad , \quad c_k^{(n)} = \min_{[x_k, x_{k+1}]} c(x) , \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Riesce, per ipotesi, $\theta_k^{(n)} > 0$ e $c_k^{(n)} \geq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Come funzioni $\tilde{\theta}(x)$ e $\tilde{c}(x)$, assumiamo le funzioni, costanti a tratti, che più propriamente denoteremo con $\theta^{(n)}(x)$ e $c^{(n)}(x)$, così definite:

$$(7) \qquad \theta^{(n)}(x) = \theta_k^{(n)} \quad \text{per} \quad x_k \leq x < x_{k+1} \; ; \; c^{(n)}(x) = c_k^{(n)} \quad \text{per} \quad x_k \leq x < x_{k+1}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n) \; ; \; (\theta^{(n)}(x_{n+1}) = \theta_n^{(n)} \; ; \; c^{(n)}(x_{n+1}) = c_n^{(n)}).$$

Dato $\varepsilon > 0$ e fissato l'intero positivo ν, siano σ e τ non negativi e verificanti la (4). Si può sempre considerare un indice n_0 tale che, per $n > n_0$, risulti:

$$\theta(x) - \theta^{(n)}(x) \leq \sigma \quad , \quad c(x) - c^{(n)}(x) \leq \tau .$$

Posto allora:

$$R^{(n)}(u) = \tilde{R}(u) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \theta_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{du}{dx}\right]^2 dx + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u^2\, dx}{\int_0^1 u^2\, dx},$$

si potrà applicare il Teorema I relativamente al funzionale $R^{(n)}(u)$ ed approssimare, a meno dell'ε prefissato, i primi ν autovalori del problema (2).

Il citato Teorema I permette di ottenere un risultato assai preciso, quale quello indicato nel seguente Teorema II.

Posto

$$\lambda_h^{(n)} = \max \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} R^{(n)}(u) \qquad (h = 1, 2, \cdots),$$

e $\bar{\theta} = \max\limits_{[0,1]} \theta(x)$, $\bar{c} = \max\limits_{[0,1]} c(x)$, si ha:

II. *Sia* $c(x)$ *uniformemente lipschitziana in* $[0, 1]$, *con coefficiente di Lipschitz* L. *Risulti inoltre*: $|\theta'(x)| \leq M$ *in* $[0, 1]$. *Fissato l'intero* $\nu > 0$, *riesce, qualunque sia* n:

$$(8) \qquad \lambda_h^{(n)} \leq \lambda_h \leq \lambda_h^{(n)} + \varepsilon^{(n,\nu)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, \nu),$$

essendo

$$\varepsilon^{(n,\nu)} = \delta_n \frac{M(\bar{c} + \bar{\theta}\nu^2\pi^2) + L\theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}} . \tag{9}$$

Sia:

$$\bar{\lambda}_h = \max \min_{\substack{u \perp p_i \\ i=1,2,\cdots,h-1}} \frac{\bar{\theta} \int_0^1 \left[\frac{du}{dx}\right]^2 dx + \bar{c} \int_0^1 u^2 \, dx}{\int_0^1 u^2 \, dx} .$$

Per il principio di massimo–minimo che abbiamo sopra richiamato, avremo $\lambda_h \leq \bar{\lambda}_h$. D'altra parte, i numeri $\bar{\lambda}_h$ sono gli autovalori del seguente problema:

$$\bar{\theta}u'' - \bar{c}u + \lambda u = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

e, pertanto, $\bar{\lambda}_h = \bar{c} + \bar{\theta}h^2\pi^2$. Fissati arbitrariamente gli interi positivi n e ν, si assuma $\varepsilon = \varepsilon^{(n,\nu)}$, essendo $\varepsilon^{(n,\nu)}$ dato dalla (9). Ponendo: $\sigma = M\delta_n$ e $\tau = L\delta_n$, riesce verificata la (4). Allora, assumendo come funzioni $\tilde{\theta}(x)$ e $\tilde{c}(x)$, rispettivamente, le funzioni $\theta^{(n)}(x)$ e $c^{(n)}(x)$ definite dalle (7), risultano verificate le (5) e, quindi, le (6). Donde le (8).

2. – Il problema differenziale avente per autovalori i $\lambda_h^{(n)}$.

Sia $u(x)$ una funzione di $\mathring{H}_1(0, 1)$, $(u \not\equiv 0)$ che renda stazionario il funzionale $R^{(n)}(u)$ e sia $v(x)$ un arbitrario elemento di $\mathring{H}_1(0, 1)$. Poniamo $\Psi(t) = R^{(n)}(u + tv)$. Dalla $\Psi'(0) = 0$, si deduce, qualunque sia $v \in \mathring{H}_1(0, 1)$:

$$\sum_{k=1}^{h} \theta_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u' v' \, dx + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} uv \, dx - \lambda^{(n)} \int_0^1 uv \, dx = 0 , \tag{10}$$

con $\lambda^{(n)} = R^{(n)}(u)$.

Considerando, in particolare, per ogni k, le $v(x)$ con supporto contenuto in (x_k, x_{k+1}), si trova:

$$\theta_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u' v' \, dx + c_k^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} uv \, dx - \lambda^{(n)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} uv \, dx = 0 . \tag{11}$$

Nel primo integrale della (11) si può eseguire una integrazione per parti [3] e si ottiene:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\theta_k^{(n)} u'' - c_k^{(n)} u + \lambda^{(n)} u) v \, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Ne segue, data l'arbitrarietà di v:

$$\theta_k^{(n)} u'' - c_k^{(n)} u + \lambda^{(n)} u = 0 \qquad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \; (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{12}$$

(3) La u, in quanto soluzione delle (11), ha derivata prima assolutamente continua in (x_k, x_{k+1}) e derivata seconda di quadrato sommabile. Ciò si può constatare, ad esempio, al modo seguente. Poniamo, per semplicità di scrittura $x_k = a$ e $x_{k+1} = b$ e sia $B(x, \xi)$ la funzione così definita nel quadrato $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$:

$$B(x, \xi) \begin{cases} = (x - a)(\xi - b) & \text{per } x \geq \xi \\ = (\xi - a)(x - b) & \text{per } x \leq \xi . \end{cases}$$

Se φ è un'arbitraria funzione di $\mathfrak{L}^{(2)}(a, b)$, si può assumere come funzione $v(x)$ la funzione:

$$v(x) = \int_a^b B(x, \xi) \varphi(\xi) \, d\xi .$$

Posto allora: $g(x) = \dfrac{\lambda^{(n)} u - c_k^{(n)} u}{\theta_k^{(n)}}$, le (11) si scrivono:

$$\int_a^b u'(x) \, dx \int_a^b \frac{\partial B}{\partial x}(x, \xi) \varphi(\xi) \, d\xi = \int_a^b g(x) \, dx \int_a^b B(x, \xi) \varphi(\xi) \, d\xi .$$

Eseguita una inversione dell'ordine delle integrazioni e data l'arbitrarietà di φ ne segue:

$$\int_a^b \frac{\partial B}{\partial x}(x, \xi) u'(x) \, dx = \int_a^b B(x, \xi) g(x) \, dx$$

e, quindi, vista la definizione della $B(x, \xi)$:

$$\int_a^\xi (\xi - a) u'(x) \, dx + \int_\xi^b (\xi - b) u'(x) \, dx = \int_a^b B(x, \xi) g(x) \, dx .$$

Da ciò segue:

$$(\xi - a)[u(\xi) - u(a)] + (\xi - b)[u(b) - u(\xi)] = \int_a^b B(x, \xi) g(x) \, dx$$

e quindi, essendo:

$$u(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b B(x, \xi) g(x) \, dx + \frac{1}{b - a} \{ u(a)(\xi - a) + u(b)(b - \xi) \},$$

le asserite proprietà di regolarità della funzione $u(x)$.

Dalle (10), considerando le funzioni v di $\overset{\circ}{\mathrm{H}}_1(0\,,1)$ con supporto contenuto in $(x_{k-1}\,,x_{k+1})$ $(k=2\,,3\,,\cdots,n)$, si trae:

$$\theta_{k-1}^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_k} u'\,v'\,\mathrm{d}x+\theta_k^{(n)}\int_{x_k}^{x_{k+1}} u'\,v'\,\mathrm{d}x+c_{k-1}^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_k} uv\,\mathrm{d}x+ \\ +c_k^{(n)}\int_{x_k}^{x_{k+1}} uv\,\mathrm{d}x-\lambda^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} uv\,\mathrm{d}x=0\,. \tag{13}$$

Dalle (13), detti $f_-(x_k)$ e $f_+(x_k)$ rispettivamente il limite sinistro e il limite destro di una funzione $f(x)$ per $x\to x_k$, si ottiene:

$$\theta_{k-1}^{(n)}\,u'_-(x_k)\,v(x_k)-\theta_{k-1}^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_k} u''\,v\,\mathrm{d}x-\theta_k^{(n)}\,u'_+(x_k)\,v(x_k)- \\ -\theta_k^{(n)}\int_{x_k}^{x_{k+1}} u''\,v\,\mathrm{d}x+c_{k-1}^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_k} uv\,\mathrm{d}x+c_k^{(n)}\int_{x_k}^{x_{k+1}} uv\,\mathrm{d}x-\lambda^{(n)}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} uv\,\mathrm{d}x=0$$

e, quindi, per $k=2\,,\cdots,n$:

$$v(x_k)\,[\theta_{k-1}^{(n)}\,u'_-(x_k)-\theta_k^{(n)}\,u'_+(x_k)]-\int_{x_{k-1}}^{x_k}[\theta_{k-1}^{(n)}\,u''-c_{k-1}^{(n)}\,u+\lambda^{(n)}\,u]\,v\,\mathrm{d}x- \\ -\int_{x_k}^{x_{k+1}}[\theta_k^{(n)}\,u''-c_k^{(n)}\,u+\lambda^{(n)}\,u]\,v\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Data l'arbitrarietà di v nella considerata classe di funzioni, dalle (12) si trae:

$$\theta_{k-1}^{(n)}\,u'_-(x_k)-\theta_k^{(n)}\,u'_+(x_k)=0\qquad(k=2\,,3\,,\cdots,n). \tag{14}$$

I valori $\lambda^{(n)}=\mathrm{R}^{(n)}(u)$ sono pertanto gli autovalori del seguente problema differenziale:

$$\theta_k^{(n)}\,u''-c_k^{(n)}\,u+\lambda^{(n)}\,u=0\qquad x_k\le x\le x_{k+1}\qquad(k=1\,,2\,,\cdots,n) \tag{15}$$

$$u(x_1)=u(x_{n+1})=0\quad;\quad u_-(x_k)=u_+(x_k)\quad;\quad \theta_{k-1}^{(n)}\,u'_-(x_k)=\theta_k^{(n)}\,u'_+(x_k) \\ (k=2\,,3\,,\cdots,n) \tag{16}$$

e, viceversa, se $\lambda=\lambda^{(n)}$ è autovalore di (15), (16) e u è una corrispondente autosoluzione, il funzionale $\mathrm{R}^{(n)}(u)$ è stazionario e riesce $\lambda^{(n)}=\mathrm{R}^{(n)}(u)$.