Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alexe Marinescu

Sur l'optimisation de l'entrée des engins spatiaux dans l'atmosphère planétaire

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 352–358.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_352_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Astrodinamica. — *Sur l'optimisation de l'entrée des engins spatiaux dans l'atmosphère planétaire.* Nota di ALEXE MARINESCU (*), presentata (**) dal Socio C. FERRARI.

RIASSUNTO. — In questo lavoro si presenta lo studio del rientro nell'atmosfera planetaria in tempo minimo dei veicoli spaziali. La formulazione del problema variazionale si riduce ad un problema isoperimetrico del tipo « con una estremità mobile ».

Questa formulazione permette di dedurre le leggi ottime della variazione dei parametri del movimento durante il rientro.

NOTATIONS

Oxz – système inerte d'axes de coordonnées (fig. 2);
z – altitude;
l – distance sur l'horizontale parcourue par l'engin;
R_0 – rayon de la planète;
r – rayon–vecteur de l'engin;
$P = \frac{\rho}{2} SV^2 C_z$ – portance;
$R = \frac{\rho}{2} SV^2 C_x$ – résistance à l'avancement;
ρ – densité;
S – surface de référence;
V – vitesse de l'engin;
C_z – coefficient de portance;
C_x – coefficient de résistance à l'avancement;
θ – angle d'inclinaison de la trajectoire par rapport à l'horizontale locale;
β – constante de définition de la densité en fonction de l'altitude;
g – accélération de la gravitation;
m – masse de l'engin.

On sait que le temps minimum constitue un important aspect de l'optimisation de l'entrée (1) dans l'atmosphère planétaire des engins et tout particulièrement de ceux à équipage (l'action de décélération devant être aussi brève que possible).

Cet aspect a été abordé dans le travail [1] dans le cas idéal de la densité constante, le problème de la variation étant formulé comme un problème de type Meyer.

(*) l'Auteur s'empare de cette occasion pour remercier le prof. Carlo Ferrari de ses précieuses observations et suggestions dont il a été tenu compte dans le travail ci–après.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1971.

(1) On emploie, parfois, en littérature, le terme d' « entrée » lorsque l'engin vient de l'espace et celui de « re–entrée » lorsqu'il arrive de l'orbite. En accord avec certains autres Auteurs, nous utiliserons le terme d' « entrée » pour les deux cas, étant donné que les équations de mouvement de l'engin sont les mêmes, indiféremment de l'endroit d'où arrive l'engin.

A présent, au moyen d'une autre voie, nous nous proposons d'aborder le même aspect dans le cas réel de la densité variable avec l'altitude.

Il s'agit en essence, par conséquent, de déterminer les lois optimales de variation des paramètres de mouvement, en sorte que l'engin portant puisse parcourir la trajectoire de descente entre deux altitudes z_i , z_f, dans un temps minimum, la distance sur l'horizontale $x = 1$ étant donnée dans la fig. 1.

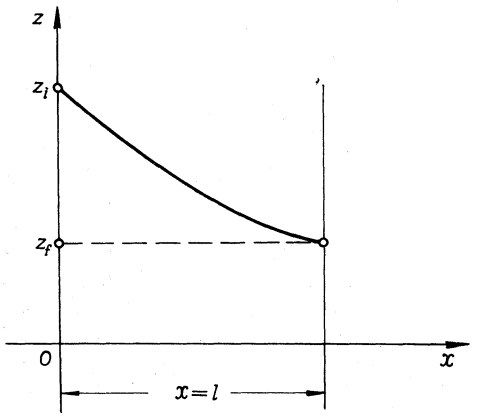

Fig. 1.

Dans ce but, il nous faut connaître tout premièrement les équations de mouvement. Considérons donc l'engin qui pénètre dans l'atmosphère dans un point de la trajectoire supposée plane (fig. 2).

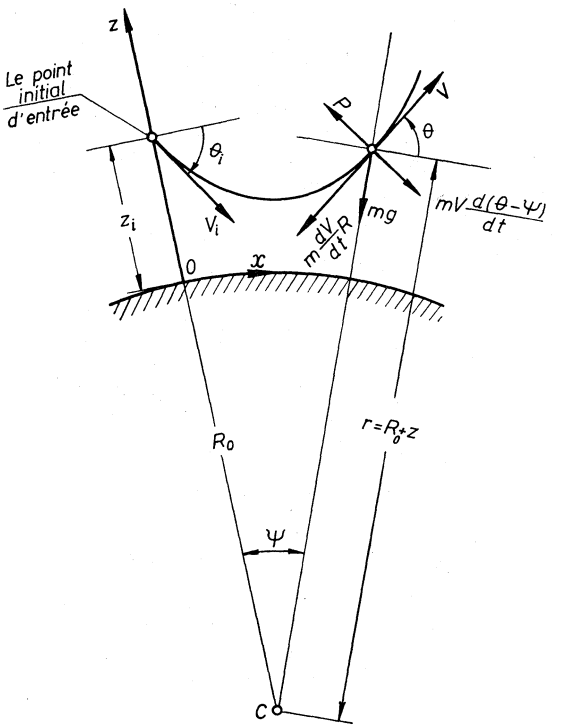

Fig. 2.

En partant des équations intrinsèques de mouvement, à l'approximation $r \approx R_0$ et convenant que l'angle θ soit positif à la descente et négatif à la montée, les équations de mouvement résultent sous la forme [2]

$$(1)\qquad \begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho}{2}SV^2C_x + mg\sin\theta \\ -mV\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho}{2}SV^2C_z - m\left(g - \frac{V^2}{R_0}\right)\cos\theta . \end{aligned}$$

Associons aux équations (1) les équations suivantes

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -V\sin\theta \\ \frac{dx}{dt} &= V\cos\theta . \end{aligned}$$

En considérant le cas de l'entrée à angles réduits et moyens ainsi qu'une portance différente de zéro, nous retiendrons le système complet d'équations sous la forme

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{SC_x}{2m}\rho V^2 \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = -V\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{SC_z}{2m}\rho V \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V\cos\theta . \end{aligned}$$

De la troisième équation (3), nous retenons

$$(4)\qquad dt = -\frac{dz}{V\sin\theta}$$

et de la troisième et quatrième équation (3),

$$(5)\qquad dx = -\operatorname{ctg}\theta\, dz .$$

Nous introduisons dans les deux premières équations (3) la variable z, en les écrivant sous la forme

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= \frac{C_x S}{2m}\frac{\rho V}{\sin\theta} \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{C_z S}{2m}\frac{\rho}{\sin\theta} \end{aligned}$$

de manière à ce que de la première équation (6), en notant $V' = \frac{dV}{dz}$ nous ayons

$$(7)\qquad \sin\theta = \frac{C_x S}{2m}\frac{\rho V}{V'} .$$

Le temps pendant lequel l'engin traverse la trajectoire de descente entre les altitudes z_i, z_f, est

$$(8)\qquad t = -\int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{V\sin\theta}$$

ou bien, en tenant compte de (7) et sachant que m est constant et supposant C_x constant, nous aurons

$$t = \frac{2m}{SC_x} \int_{z_f}^{z_i} \frac{V'}{\rho V^2}\, dz . \tag{9}$$

Exprimant ctg θ en fonction de sin θ et compte tenu de (7), nous aurons de (5)

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}\right)^2}}{\frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}}\, dz . \tag{10}$$

Puisque $\left(\frac{C_x S}{2m} \frac{\rho V}{V'}\right)^2 \ll 1$ dans l'intervalle z_i, z_f, en notant $\frac{C_x S}{2m} = a$, nous pourrons écrire l'intégrale (10) sous la forme

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a \frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2} \frac{\rho V}{V'} \right) dz . \tag{11}$$

Le problème de variation qui se pose à présent est celui de trouver le minimum de l'intégrale (9), à condition que

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a \frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2} \frac{\rho V}{V'} \right) dz = l \tag{12}$$

l étant une longueur donnée.

Le problème de variation est par conséquent un problème typiquement isopérimétrique. Puisque $z = z_i$, la vitesse donnée est $V = V_i$ et que pour $z = z_f$ elle est non précisée, l'extrêmale du problème traverse le point $V(z_i)$, z_i, en intersectant aussi la ligne droite $z = z_f$ en un point quelconque. Dans ce cas, le problème de variation isopémétrique est du type « avec une extrémité mobile », impliquant avec évidence une condition de transversalité.

La courbe qui réalise l'extremum de l'intégrale (9) est une extrêmale de la fonctionnelle

$$J = \int_{z_f}^{z_i} H\, dz \tag{13}$$

où

$$H = \frac{1}{a} \frac{V'}{\rho V^2} + \lambda \left(\frac{1}{a} \frac{V'}{\rho V} - \frac{a}{2} \frac{\rho V}{V'} \right) \tag{14}$$

λ étant une constante.

Etant donné que l'extrêmale doit pouvoir vérifier l'équation d'Euler

$$\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{d}{dz}\frac{\partial H}{\partial V'} = 0 \tag{15}$$

compte tenu de l'expression (14) de la fonction H, l'équation d'Euler (15) mène à l'équation différentielle

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho} V' - \frac{V'^2}{V} + V'^3 \left(\frac{\rho'}{a^2 \rho^3 V^2} + \frac{\rho'}{\lambda a^2 \rho^3 V^3} \right) = 0 . \tag{16}$$

La condition nécessaire et suffisante de transversalité pour l'extrémité mobile placée sur la ligne droite $z = z_f$ peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\partial H}{\partial V'} \right]_{z = z_f} = 0 \tag{17}$$

d'où l'on déduit

$$\lambda \approx - \frac{1}{V(z_f)} . \tag{18}$$

En ce qui concerne la nature de l'extrémum, on peut démontrer que tant la condition du minimum fort (Weierstrass) que celle du minimum faible (Legendre) sont satisfaites, la fonctionnelle (9) étant en vérité minimale le long de l'extrêmale, en vertu de (13).

Pour l'intégration exacte de l'équation (16), il est nécessaire tout d'abord de déterminer la constante λ.

Prenons arbitrairement λ et transformons l'équation (16) dans le système

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= u \\ \frac{du}{dz} &= - \frac{\beta}{2} u + \frac{u^2}{V} + \frac{\beta u^3}{a^2 \rho^2 V^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda V} \right) \end{aligned} \tag{16 bis}$$

qui peut être résolu numériquement par un procédé d'itération, en sorte que les conditions $V(z_i) = V_i$, $V(z_f) = -\frac{1}{\lambda}$ soient satisfaites.

On déduit ensuite de l'équation (10) la valeur de x qui correspond à la valeur de λ qui a été considéré. On trace ainsi le diagramme qui donnera x en fonction de λ, et dont, pour chaque valeur de x donnée préalablement, on déduira la valeur correspondante de λ. Afin de réduire le nombre d'itérations dans les résolutions du système (16 bis) et afin d'obtenir plus rapidement λ correspondant à une valeur donnée pour x, on peut encore appliquer le procédé suivant, par ailleurs utile si la constante a est suffisamment petite:

On remarquera aisément le fait que dans la partie finale de l'évolution (lorsque $z \to z_f$ et $V \to V(z_f)$), le terme

$$\left(\frac{\rho'}{a^2 \rho^3 V^2} + \frac{\rho'}{\lambda a^2 \rho^3 V^3} \right) \to 0$$

et l'équation (16) devient

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho} V' - \frac{V'^2}{V} = 0 \tag{19}$$

dont la solution – si l'on adopte pour la variation de la densité avec l'altitude la loi exponentielle

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta z} \tag{20}$$

sera, à la suite des calculs:

$$V = C_2 e^{-\frac{2C_1}{\beta} e^{-(\beta/2) z}} . \tag{21}$$

Les constantes C_2, C_1, se déterminent de la condition $z = z_i$, $V = V_i$ et supplémentairement de la condition (12). De la première condition, en notant $\frac{2C_1}{\beta} = k$ il résulte

$$V = V_i e^{k\left(e^{-(\beta/2) z_i} - e^{-(\beta/2) z}\right)} . \tag{22}$$

En introduisant l'expression (22) de la vitesse, sa dérivée et l'expression exponentielle (20) de la densité, dans (12), on obtiendra une équation du deuxième degré dans k dont la solution à sens physique ($k > 0$) est

$$k = \frac{a\rho_0 \left[l + \sqrt{l^2 - \frac{8}{\beta^2} \left(e^{(\beta/2) z_i} - e^{(\beta/2) z_f}\right)\left(e^{-(\beta/2) z_i} - e^{-(\beta/2) z_f}\right)} \right]}{2\left(e^{(\beta/2) z_i} - e^{(\beta/2) z_f}\right)} . \tag{23}$$

L'expression de la vitesse dans la partie finale de l'évolution étant définie de (18), il résulte λ, de même que la valeur de $[u]_{z=z_i}$, qui peut être prise au premier rang du procédé d'itération.

A l'aide de la loi optimale de variation de la vitesse, ainsi déterminée, comme d'ailleurs aussi au moyen de V' de la première équation (6), nous déduirons l'angle optimal

$$\theta = \arcsin a \frac{\rho V}{V'} \tag{24}$$

et de la deuxième équation (6) – laquelle exige une résolution identique – il résulte, à partir des considérations ci-dessus, un coefficient de portance

$$C_z = C_x \frac{\sin\theta}{a\rho} \frac{d\left(\arcsin a \frac{\rho V}{V'}\right)}{dz} . \tag{25}$$

En ayant la loi optimale de variation de la vitesse ainsi que celle de V', les relations (24), (25) donneront en fonction de z, la variation optimale de l'angle d'inclinaison de la trajectoire par rapport à la ligne horizontale, aussi bien que du coefficient de portance.

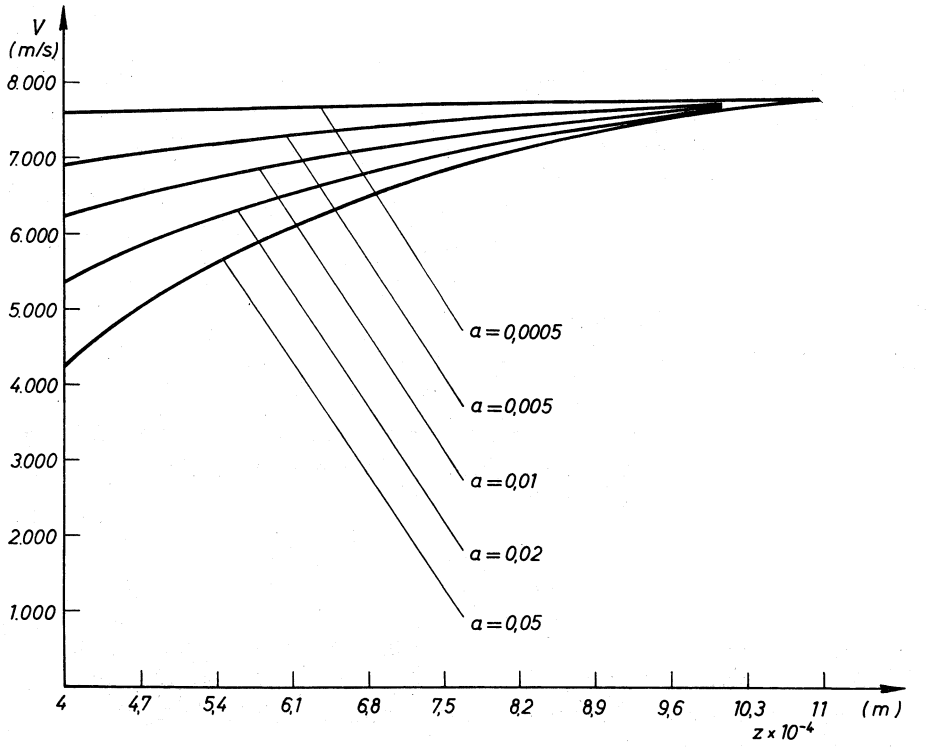

Fig. 3.

A titre d'explication, en partant des données suivantes:

z_i = 110.000 m;
z_f = 40.000 m;
l = 700.000 m;
ρ_0 = 0,125 kg sec^2/m^4;
β = 1,395 · 10^{-4} $^{m-1}$;
V_i = 7.800 m/sec.

on a calculé pour plusieurs valeurs du paramètre $a = \frac{C_x S}{2m}$ la vitesse pour l'entrée optimale en temps minimum, représentée dans le dessin de la fig. 3.

Références

[1] L. Pottsepp and Y. Shi, *Optimal Lift Control of a Hypersonic Glider*, « AIAA Journal », 6, June 1968.

[2] Al. Marinescu, *Introducere în dinamica rachetei* (*Introduction à la dynamique de la fusée*), Editions de l'Académie de la R.S. de Roumanie, Bucarest 1967.

[3] M. A. Lavrentiev et L. A. Liusternic, *Curs de calcul variațional* (Cours de calcul de variation), Editura Tehnică, Bucarest 1955.