Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo Dicuonzo

Sulla rappresentazione dei piani non euclidei e di quello euclideo sulle quadriche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 317–322.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_317_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Geometria. — *Sulla rappresentazione dei piani non euclidei e di quello euclideo sulle quadriche* (*). Nota (**) di VINCENZO DICUONZO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — The purpose of this paper is the construction, on a quadric, of models of euclidean and non-euclidean planes, including De Sitter's and Minkowski's planes.

In questa Nota vengono costruiti sulle quadriche dei modelli, sia del piano euclideo che di quelli non euclidei, compresi anche quelli di De Sitter e di Minkowski.

Dato lo spazio proiettivo tridimensionale $\mathcal{S}$ sul campo dei complessi, si consideri in esso una *quadrica* Σ *a punti ellittici o iperbolici*, e sia Φ *la polarità associata a* Σ.

Fissato un piano reale ω, si costruiscono su Σ dei modelli, sia del piano euclideo che di quelli non euclidei, assumendo come rette del modello, o *pseudorette*, *le coniche a punti reali intersezioni di* Σ *con i piani coniugati di* ω *in* Φ, e come punti del modello, o *pseudopunti*, le *coppie di punti reali*, *non appartenenti ad* ω, *intersezioni di* Σ *con rette coniugate di* ω *in* Φ; nel caso in cui ω sia tangente a Σ in un punto O, gli pseudopunti sono punti di Σ non appartenenti ad ω.

Se Σ *è a punti ellittici*, *secondo che* ω *sia esterno*, *tangente o secante rispetto a* Σ, si ha un modello rispettivamente di *piano ellittico*, *euclideo o iperbolico*. *Se* Σ *è a punti iperbolici*, *secondo che* ω *sia secante o tangente rispetto a* Σ, si ha un modello rispettivamente di *piano di De Sitter o di Minkowski*.

La relazione di *appartenenza tra pseudopunti e pseudorette* significa *appartenenza tra rette e piani corrispondenti*. Il parallelismo tra pseudorette significa che esse si toccano in un punto reale di ω: nel caso del piano ellittico manca la relazione di parallelismo.

La *perpendicolarità tra pseudorette* viene definita come *coniugio in* Φ *tra i piani che le contengono*; la relazione di coniugio verrà indicata con il simbolo $|$.

Se π è un piano contenente una pseudoretta p e P è il suo polo rispetto a Σ, si indichi con Π l'omologia armonica di centro P e piano–asse π: la restrizione di Π a Σ viene chiamata *pseudosimmetria assiale* ed è indicata con il simbolo σ_p. Per Π restano uniti sia ω che il suo polo O rispetto a Σ e, oltre P e i punti di π, anche le rette e i piani per P; per σ_p restano uniti quindi sia gli pseudopunti di p che le pseudorette perpendicolari a p e anche la conica $\mathcal{C} = \omega \cap \Sigma$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Naz. per le Strutture Algebriche e Geometriche del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1971.

Si definisce movimento del modello, o *pseudomovimento, ogni prodotto di pseudosimmetrie assiali*. Se ω non è tangente a Σ, indicata con Ω l'omologia armonica di centro O e piano–asse ω, gli pseudomovimenti sono le restrizioni delle omografie (dirette e inverse) permutabili con Ω, la cui restrizione a Σ è l'identità per il modello.

Il prodotto di due pseudosimmetrie rispetto a due piani coniugati in Φ, viene chiamata *pseudosimmetria centrale*: questa è la restrizione di una involuzione biassiale con un asse $\bar{r}$ passante per O e un altro $\bar{r}'$ appartenente ad ω.

Le pseudosimmetrie assiali e quelle centrali sono i soli pseudomovimenti involutivi, in quanto le omologie armoniche e le involuzioni biassiali esauriscono l'insieme delle omografie involutive di $\mathcal{S}$: per la definizione data, le *pseudosimmetrie assiali* costituiscono gli *elementi generatori del gruppo degli pseudomovimenti*.

Proiettando da O su ω, se $O \notin \omega$, una pseudosimmetria assiale dà luogo ad una omologia armonica, rispetto alla quale è unita la conica $\mathcal{A}$ e viceversa; si ha quindi un isomorfismo tra il gruppo degli pseudomovimenti e il gruppo delle collineazioni di ω che mutano $\mathcal{A}$ in sé, per cui i tre modelli corrispondenti costruiti su Σ sono proprio i modelli del piano ellittico, di quello iperbolico e di quello di De Sitter.

Se $O \in \omega$, proiettando da O su un piano $\psi \neq \omega$, ogni pseudosimmetria assiale dà luogo ad una omologia armonica, per la quale si conserva l'involuzione $\mathcal{I}$, restrizione di Φ alla retta $\bar{q} = \omega \cap \psi$. Secondo che Σ sia a punti ellittici o iperbolici, $\mathcal{I}$ è ellittica o iperbolica. Tra le pseudosimmetrie assiali e le omologie armoniche di ψ, che conservano $\mathcal{I}$, si ha una biiezione; si ha quindi un isomorfismo tra il gruppo degli pseudomovimenti e il gruppo delle collineazioni di ψ che conservano $\mathcal{I}$, per cui i due modelli corrispondenti costruiti su Σ sono proprio i modelli del piano euclideo e di quello di Minkowski, secondo che $\mathcal{I}$ sia ellittica o iperbolica.

Se $\bar{r}$ ed $\bar{r}'$ sono due rette (reali) coniugate rispetto a Σ e $O \in \bar{r}$ e quindi $\bar{r}' \in \omega$, mentre i piani per $\bar{r}$ danno luogo ad un fascio $\mathcal{F}$ di pseudorette, i piani per $\bar{r}'$ secanti Σ danno luogo alle traiettorie ortogonali delle pseudorette di $\mathcal{F}$.

Ricorrendo ad una traiettoria ortogonale delle pseudorette di un fascio $\mathcal{F}$ si riesce a dimostrare agevolmente il cosiddetto *teorema delle tre simmetrie*, fondamentale per l'analisi strutturale del gruppo dei movimenti di un piano metrico.

Se a, b, c sono tre pseudorette di un fascio $\mathcal{F}$ e t è una traiettoria ortogonale di $\mathcal{F}$, costituita da una conica $\mathcal{C}$ non degenere e a punti reali, le pseudosimmetrie $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ determinano su $\mathcal{C}$ tre involuzioni $\bar{\sigma}_a, \bar{\sigma}_b, \bar{\sigma}_c$, appartenenti ad uno stesso fascio $\bar{\mathcal{F}}$, le quali determinano a loro volta $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$; poiché $\bar{\sigma}_a \bar{\sigma}_b \bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_d$, con $\bar{\sigma}_d \in \bar{\mathcal{F}}$, si ha $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$, con $d \in \mathcal{F}$.

Nei casi del piano iperbolico e di quello di De Sitter si può prendere $\mathcal{C}$ coincidente con $\mathcal{A}$: poiché $\mathcal{A}$ è ortogonale a qualunque pseudoretta, ogni pseudosimmetria è caratterizzata da una involuzione su $\mathcal{A}$, per cui *i gruppi dei movimenti del piano iperbolico e di quello di De Sitter risultano isomorfi al gruppo delle proiettività su una retta proiettiva reale*.

Nei casi del piano ellittico e di quello di De Sitter, l'esistenza di tetraedri autopolari rispetto a Σ, aventi un vertice in O e quindi tre piani per O secanti Σ, comporta l'*esistenza di terne di pseudorette a due a due perpendicolari.*

Nei casi del piano euclideo e di quello di *Minkowski*, se si considera un fascio di pseudorette parallele, appartenenti cioè a piani passanti per una retta $\bar{r} \in \omega$, con $O \in \bar{r}$, le traiettorie ortogonali di $\mathcal{F}$ sono pseudorette parallele appartenenti ai piani per la retta $\bar{r}'$ coniugata di $\bar{r}$, tale che $O \in \bar{r}'$ e $\bar{r}' \in \omega$: questo significa che nei suddetti piani *esistono dei rettangoli.*

Esaminiamo ora alcune proprietà caratteristiche dei vari modelli.

1. MODELLO DEL PIANO ELLITTICO

La quadrica Σ è a punti ellittici e il piano ω è esterno a Σ e quindi O interno a Σ e la conica $\mathcal{C}$ è non degenere e a punti immaginari.

Poiché tutti i piani e le rette reali per O sono secanti Σ, le pseudorette sono dello stesso tipo e così pure gli pseudopunti, inoltre *per due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata*, e *due pseudorette distinte hanno sempre uno pseudopunto in comune*. Circa la perpendicolarità tra pseudorette sappiamo già che *esistono dei triangoli trirettangoli*.

Sia $\bar{r}$ una retta reale per O ed $\bar{r}'$ $(\in \omega)$ la sua coniugata. Se $\alpha, \beta \ni \bar{r}$ e $\gamma, \omega \ni \bar{r}'$, con $\alpha | \beta$ e $\gamma | \omega$, per le omologie armoniche associate ad $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ si ha: $\Pi_\alpha \Pi_\beta = \Pi_\gamma \Pi_\omega$. Passando alle restrizioni a Σ risulta $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c$, dove a, b, c sono le pseudorette rispettivamente dei piani α, β, γ. Poiché $a \perp b$, posto $P = a \cap b$, si ha $\sigma_a \sigma_b = \sigma_P = \sigma_c$, cioè *ogni pseudosimmetria centrale è anche assiale.* Da $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c$, consegue $\sigma_a = \sigma_c \sigma_b = \sigma_Q$, essendo $c \perp b$ e $Q = c \cap b$; cioè *ogni pseudosimmetria assiale è anche centrale.*

Se $\bar{r} \ni O$ e $\bar{r} | \pi$, $\forall \alpha \ni \bar{r} \Rightarrow \alpha | \pi$: questo significa che *le pseudorette appartenenti ad un fascio $\mathcal{F}$ sono perpendicolari ad una stessa pseudoretta a*, che viene detta polare del centro del fascio $\mathcal{F}$. Se $O \in \bar{r}$, π e $\bar{r} \not| \pi$, $\exists! \alpha \ni \bar{r}$, con $\alpha | \pi$; cioè *dati una pseudoretta p e uno pseudopunto* R, *con p non polare di* R, *per* R *esiste una sola pseudoretta* $a \perp p$.

Se a, b, c, d sono quattro pseudorette, posto $P = a \cap b$ e $Q = c \cap d$, sia g la pseudoretta passante per P e Q. Si ha: $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \sigma_a \sigma_b \sigma_g \sigma_g \sigma_c \sigma_d = \sigma_h \sigma_k$. In modo analogo, date cinque pseudorette a, b, c, d, e, si ha: $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d \sigma_e = \sigma_h \sigma_k \sigma_e$. Se $k \not\perp e$, posto $R = h \cap k$, sia $i \perp e$, con $R \in i$; risulta $\sigma_h \sigma_k \sigma_i = \sigma_m$, cioè $\sigma_h \sigma_k = \sigma_m \sigma_i$, e quindi $\sigma_h \sigma_k \sigma_e = \sigma_m \sigma_i \sigma_e = \sigma_m \sigma_p$, con $p \perp i, e$. Riassumendo si ha che *ogni pseudomovimento si esprime come prodotto di due pseudosimmetrie assiali*; un siffatto prodotto ordinariamente viene chiamato rotazione.

2. MODELLO DEL PIANO IPERBOLICO

La quadrica Σ è a punti ellittici e ω è secante Σ, perciò O è esterno a Σ e $\mathcal{C}$ è non degenere e a punti reali.

Mentre due rette distinte per O e secanti Σ individuano un piano secante Σ, due piani distinti secanti Σ hanno in comune una retta $\bar{r}$, la quale rispetto a Σ può essere secante, tangente o esterna; si ha quindi che *per due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata*, ma *due pseudorette possono essere incidenti, parallele o disgiunte*. Poiché ogni pseudoretta p incontra $\mathcal{C}$ in due punti reali e distinti, risulta che *per ogni pseudopunto* $R \notin p$ *si possono condurre due pseudorette distinte parallele a* p.

Circa la perpendicolarità tra pseudorette va osservato che ogni tetraedro autopolare rispetto a Σ con un vertice in O ha due soli piani per O secanti Σ: questo significa che *non esistono triangoli trirettangoli* e che *due pseudorette perpendicolari sono incidenti*. Se π è un piano per O secante Σ e $\bar{r}$ è la retta coniugata di π e passante per O, $\bar{r}$ è esterna a Σ: perciò *le pseudorette perpendicolari ad una stessa pseudoretta sono disgiunte*. Dalla mancanza di triangoli trirettangoli consegue che una pseudosimmetria centrale non può essere anche assiale.

Circa gli pseudomovimenti si è visto già che essi formano un gruppo G isomorfo al gruppo delle proiettività su una retta reale proiettiva: essi possono essere perciò suddivisi in pari e dispari, secondo che siano prodotti di un numero pari o dispari di pseudosimmetrie assiali. Gli pseudomovimenti pari formano un gruppo $G^+ (\lhd G)$ generato dalle pseudosimmetrie centrali, mentre G è generato da quelle assiali.

3. Modello del piano di De Sitter

La quadrica Σ *è a punti iperbolici e* ω *è secante* Σ e quindi $\mathcal{C}$ è a punti reali e non degenere e $O \notin \Sigma$.

Ogni piano per O sega $\mathcal{C}$ in due punti che possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, oppure complessi coniugati: *esistono* perciò *tre tipi di pseudorette*, le quali vengono dette rispettivamente *temporali, di luce, o spaziali*. Le pseudorette di luce appartengono a piani tangenti a Σ e sono quindi coniche degeneri. Come per il piano iperbolico, *per due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata*, ma *due pseudorette distinte possono essere incidenti, parallele o disgiunte*. Se di due pseudorette distinte a e b una è spaziale, esse sono incidenti; così pure se sono entrambe di luce; se a è di luce e b è temporale esse sono o incidenti, o parallele; se a e b sono entrambe temporali, possono essere incidenti, o parallele, oppure disgiunte.

Circa la perpendicolarità tra pseudorette va osservato che nei tetraedri autopolari rispetto a Σ con un vertice in O, dei tre piani per O uno è esterno ad $\mathcal{C}$ e due secanti $\mathcal{C}$. *Esistono* quindi *terne di pseudorette a due a due perpendicolari, una delle quali è spaziale e le altre temporali e disgiunte*.

Le pseudorette di luce sono perpendicolari a se stesse e vengono dette isotrope.

Le pseudosimmetrie assiali hanno gli assi o temporali o spaziali: per l'esistenza di trilateri trirettangoli *una pseudosimmetria spaziale è uguale al prodotto di due pseudosimmetrie temporali con assi perpendicolari e disgiunti*.

Ad ogni pseudosimmetria σ_a *viene associata una ben determinata involuzione iperbolica o ellittica su* $\mathcal{C}$, *secondo che a sia temporale o spaziale e viceversa*, e quindi *ad ogni pseudomovimento è associata una proiettività su* $\mathcal{C}$ *e viceversa*, per cui *il gruppo* G *dei movimenti del piano di De Sitter è isomorfo al gruppo delle proiettività su una retta reale proiettiva.* Gli *pseudomovimenti* si possono perciò suddividere in *pari* e *dispari*, secondo che siano rappresentati come prodotti di un numero pari o dispari di pseudosimmetrie temporali. Gli *pseudomovimenti pari formano un gruppo* $G^+ (\lhd G)$ *generato dalle pseudosimmetrie spaziali.*

4. MODELLO DEL PIANO EUCLIDEO

La quadrica Σ *è a punti ellittici e* ω *è tangente a* Σ, per cui $O \in \Sigma$ e $\mathfrak{C}$ è una conica degenere in due rette complesse coniugate.

Le rette per O, non appartenenti ad ω, sono tutte seganti Σ e così pure i piani per O diversi da ω, i quali però possono segarsi secondo una retta appartenente o no ad ω: *le pseudorette sono* quindi *tutte dello stesso tipo*, e per *due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata*, ma *due pseudorette possono essere parallele o incidenti.*

Si verifica facilmente che *rispetto ad una pseudoretta a, per uno pseudopunto* P *qualunque esiste una ben determinata pseudoretta* $b \,//\, a$ *e un'altra* $c \perp a$; e inoltre, come è stato fatto notare nella prima parte, se si ha un fascio $\mathfrak{F}_1$ di pseudorette parallele, esiste un altro fascio $\mathfrak{F}_2$ di pseudorette parallele e perpendicolari a quelle di $\mathfrak{F}_1$, e quindi *esistono dei rettangoli.*

Circa *gli pseudomovimenti*, nella prima parte è stato dimostrato che essi *formano un gruppo* G *isomorfo al gruppo delle collineazioni di un piano proiettivo, per le quali è unita una involuzione ellittica su una retta.* Essi vengono suddivisi in *pari* e *dispari*, secondo che siano prodotti di un numero pari o dispari di pseudosimmetrie assiali. *Quelli pari* (*rotazioni e traslazioni*) *formano un gruppo* $G^+ (\lhd G)$ *generato dalle pseudosimmetrie centrali.* Dall'esistenza di rettangoli consegue che *il prodotto di tre pseudosimmetrie centrali è uguale ad una pseudosimmetria centrale, anche se i centri non siano allineati.*

5. MODELLO DEL PIANO DI MINKOWSKI

La quadrica Σ *è a punti iperbolici e* ω *è tangente a* Σ, perciò $O \in \omega$ e $\mathfrak{C}$ è una conica degenere in due rette reali e distinte u e v.

I piani per u e v sono tutti tangenti a Σ, mentre gli altri piani per O sono secanti Σ; le rette per O, non appartenenti ad ω sono tutte secanti Σ. *Le pseudorette sono* perciò *di due tipi, ordinarie o isotrope*, secondo che appartengano a piani secanti o tangenti a Σ. In corrispondenza delle rette u e v si hanno *due fasci di pseudorette isotrope parallele: per ogni pseudopunto passano due pseudorette isotrope appartenenti a fasci distinti. Per due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata, e due pseudorette di tipo diverso sono incidenti, mentre due dello stesso tipo sono o incidenti o parallele.* Il parallelismo come la perpendicolarità intercorrono tra pseudorette dello stesso tipo. *Ogni pseudoretta isotropa è perpendicolare a se stessa e quelle di uno stesso fascio sono tra loro parallele e perpendicolari.* Come per il piano euclideo, dato un fascio $\mathfrak{F}_1$

di pseudorette ordinarie parallele, esiste un altro fascio $\mathfrak{F}_2$ di pseudorette ordinarie, parallele tra loro e perpendicolari a quelle di $\mathfrak{F}_1$. Da questo consegue, come sappiamo, l'*esistenza di rettangoli* e inoltre che *il prodotto di tre pseudosimmetrie centrali è uguale ad una pseudosimmetria centrale anche se i centri non siano allineati*.

Le pseudosimmetrie assiali sono soltanto rispetto a pseudorette ordinarie: questo porta al risultato che *ogni pseudomovimento si ottiene come prodotto di al massimo quattro pseudosimmetrie assiali*. Per la dimostrazione di questa proprietà e di numerose altre proprietà dei vari piani metrici si rimanda alla Nota, *Sulla genesi spaziale di modelli di piani metrici non euclidei*, « Rendiconti di Matematica » (di prossima pubblicazione).