Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sender Solomon

Opérateur de Carathéodory sur un espace topologique mesuré

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.5, p. 305–312.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_305_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Analisi funzionale. — *Opérateur de Carathéodory sur un espace topologique mesuré.* Nota di SENDER SOLOMON, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — La presente Nota è dedicata allo studio dell'esistenza di soluzioni per una classe di equazioni integrali in uno spazio topologico.

En partant des études de A. Haimovici sur les équations différentielles pour des fonctions d'ensemble (voir par exemple [2], [3]) et d'un travail de C. Corduneanu [1] sur les équations fonctionnelles de Volterra, nous avons donné dans [7] un Théorème d'existence pour une équation fonctionnelle sur un espace topologique mesuré. Ici nous étudions, relativement à l'existence, une équation plus générale; parmi les cas particuliers nous trouverons un Théorème du type Carathéodory.

§ 1. NOTATIONS. – X est un espace topologique avec une mesure positive μ telle que tout compact est μ–mesurable. Γ est la classe des parties relativement compactes et sommables de X. $P : x \to P_x$ est une application de X dans Γ. $C(X ; R^n)$ est l'espace des fonctions continues $X \to R^n$ muni de la topologie de la convergence compacte. Dans $C(X ; R^n)$ nous considerons l'ensemble $L = \{u ; |u(x)| \leqq a(x)\}$ où a est une fonction positive de X dans R. S est l'espace des fonctions $X \to R^n$ sommables sur les éléments de Γ, muni de la topologie définie par l'ensemble de semi–normes

$$|u|_A = \int_A |u(y)| \, dy , \qquad A \in \Gamma .$$

§ 2. THÉORÈME. – *Admettons les conditions suivantes*:

(1) F *est une application continue* $X \times L \to S$ *et* $u_0 \in C(X ; R^n)$.

(2) $|F(x, u)(y)| \leqq b(y)$, *b étant une fonction positive* $X \to R$ *sommable sur chaque* P_x.

(3) $\displaystyle\int_{P_x} b(y) \, dy \leqq a(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \int_{P_x \Delta P_{x_0}} b(y) \, dy = 0, \quad \forall x_0 \in X.$

(4) $\displaystyle |u_0(x)| \leqq a(x) - \int_{P_x} b(y) \, dy.$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1971.

Alors l'équation

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} F(x, u)(y) \, dy$$

a, au moins, une solution dans $C(X; R^n)$.

La démonstration est semblable à celle donnée dans notre Note [7]; pour la précision nous la donnerons.

Démonstration. – De l'hypothèse il résulte l'existence d'une application V de $(0, \infty) \times X$ dans l'ensemble des parties ouvertes de X telle que $x_0 \in V(\alpha, x_0)$ et si $x \in V(\alpha, x_0)$ alors $\int_{P_x \Delta P_{x_0}} b(y) \, dy < \alpha/3$ et $|u_0(x) - u_0(x_0)| < \alpha/3$. À cette application V nous attachons l'ensemble

$$S_V = \{u ; u \in L, |u(x) - u(x_0)| < \alpha \text{ si } \alpha \in (0, \infty), x \in V(\alpha, x_0) \text{ et } x_0 \in X\}.$$

S_V est un ensemble relativement compact et convexe de l'espace $C(X; R^n)$; alors son adhérence, $\bar{S}_V$, est un ensemble convexe et compact. En appliquant le Lemme I (v. [6], p. 72) on obtient que l'ensemble des applications $X \to S$ de la forme $x \to F(x, u)$, pour $u \in \bar{S}_V$, est équicontinu. On peut alors attacher à chaque $x_0 \in X$ et à chaque nombre positif α un voisinage ouvert de x_0, $\tilde{V}(\alpha, x_0)$, tel que,

$$\int_{P_{x_0}} |F(x, u)(y) - F(x_0, u)(y)| \, dy < \alpha/3$$

si $x \in \tilde{V}(\alpha, x_0)$ et $u \in \bar{S}_V$.

Soit W une application, analogue à V, définie par la relation

$$W(\alpha, x_0) = V(\alpha, x_0) \cap \tilde{V}(\alpha, x_0).$$

Attachons à l'application W l'ensemble S_W, analogue à S_V. La démonstration s'achève par l'application du Théorème du point fixe de Schauder–Tychonoff à l'opérateur A défini sur le compact $\bar{S}_W$ par

$$(Au) x = u_0(x) + \int_{P_x} F(x, u)(y) \, dy.$$

Nous montrons d'abord que l'opérateur A transforme l'ensemble $\bar{S}_W$ dans lui même: on a

$$\begin{aligned} |(Au) x - (Au) x_0| &\leqq |u_0(x) - u_0(x_0)| + \\ &+ \left| \int_{P_x} F(x, u)(y) \, dy - \int_{P_{x_0}} F(x_0, u)(y) \, dy \right| \leqq \\ &\leqq |u_0(x) - u_0(x_0)| + \int_{P_{x_0}} |F(x, u)(y) - F(x_0, u)(y)| \, dy + \\ &+ \int_{P_x \Delta P_{x_0}} |F(x, u)(y)| \, dy \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(5)\qquad |(\mathrm{A}u)\,x - (\mathrm{A}u)\,x_0| < \alpha \qquad \text{si} \quad x \in \mathrm{W}(\alpha\,,x_0) \quad \text{et} \quad u \in \overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}}\,.$$

D'autre coté

$$|(\mathrm{A}u)\,x| \leqq |u_0(x)| + \int_{\mathrm{P}_x} b(y)\,\mathrm{d}y \leqq a(x) \qquad \text{pour} \quad u \in \mathrm{L}$$

donc $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}}) \subset \overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}}$. Il reste à montrer que l'opérateur A est continu. Puisque $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}})$ est un ensemble équicontinu de fonctions, voir la formule (5), la topologie de la convergence compacte coïncide sur $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}})$ avec la topologie de la convergence simple; d'autre coté il suffit de montrer que l'opérateur qui a le même graphe que l'opérateur A et qui applique $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}}$ sur $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{W}})$ est continu; or on peut écrire

$$|(\mathrm{A}u)\,(x) - (\mathrm{A}v)\,x| \leqq \int_{\mathrm{P}_x} |\mathrm{F}(x\,,u)\,(y) - \mathrm{F}(x\,,v)\,(y)|\,\mathrm{d}y$$

et alors on n'a qu'à signaler la continuité de l'application $\mathrm{L} \to \mathrm{S}$ de la forme $u \to \mathrm{F}(x\,,u)$ pour x fixé. Le Théorème est démontré.

Remarque. – Les conditions (3) et (4) peuvent être réalisées si l'on suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} \mu(\mathrm{P}_x \Delta \mathrm{P}_{x_0}) = 0$ $(\forall x_0 \in \mathrm{X})$ et que l'équation linéaire

$$\omega(x) = 1 + t \int_{\mathrm{P}_x} \omega(y)\,\mathrm{d}y$$

a une solution continue et positive $\mathrm{X} \to \mathrm{R}$ pour chaque valeur du paramètre réel positif t. En effet dans ce cas il existe une solution continue et positive $\mathrm{X} \to \mathrm{R}$ pour l'équation scalaire

$$a(x) = |u_0(x)| + t \int_{\mathrm{P}_x} a(y)\,\mathrm{d}y$$

(voir [6], Prop. 5.4). Alors, si l'on prend $b(y) = ta(y)$, les conditions (3) et (4) sont vérifiées trivialement sauf la relation

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\mathrm{P}_x \Delta \mathrm{P}_{x_0}} b(y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Mais, $\lim\limits_{x \to x_0} t \int_{\mathrm{P}_{x_0} - \mathrm{P}_x} a(y)\,\mathrm{d}y = 0$ puisque a est sommable sur P_{x_0} et $\lim\limits_{x \to x_0} \mu(\mathrm{P}_x \Delta \mathrm{P}_{x_0}) = 0$; d'autre coté

$$t \int_{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x_0}} a(y)\,\mathrm{d}y = t \int_{\mathrm{P}_x} a(y)\,\mathrm{d}y - t \int_{\mathrm{P}_{x_0}} a(y)\,\mathrm{d}y + t \int_{\mathrm{P}_{x_0} - \mathrm{P}_x} a(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= a(x) - |u_0(x)| - a(x_0) + |u_0(x_0)| + t \int_{\mathrm{P}_{x_0} - \mathrm{P}_x} a(y)\,\mathrm{d}y$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} t \int_{P_x - P_{x_0}} a(y)\, dy = 0 .$$

Appelons, d'après A. Haimovici, la fonction ω, fonction exponentielle généralisée; une condition suffisante pour l'existence de la fonction exponentielle généralisée dans R^n a été donnée par A. Haimovici:

$$P_x \subset [0\,,\, kx_1] \times [0\,,\, kx_2] \times \cdots \times [0\,,\, kx_n]$$

où $(x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n) = x$ et k est une constante positive.

§ 3. Maintenant nous allons deduire du Théorème plusieurs conséquences. Premièrement, notre ancien résultat ([7]):

COROLLAIRE 1. – *Soit f une application continue de* $X \times X \times C(X\,;\,R^n)$ *dans* R^n *qui vérifie la condition* $|f(x\,,y\,,z)| \leqq b(y)$, b *étant une fonction* $X \to R_+$ *sommable sur chaque* P_x *et telle que* $\lim_{x \to x_0} \int_{P_x \Delta P_{x_0}} b(y)\, dy = 0$ $(\forall x_0 \in X)$.

Alors l'équation $u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x\,,y\,,u)\, dy$ *a une solution dans l'espace* $C(X\,;\,R^n)$ *pour chaque* $u_0 \in C(X\,;\,R^n)$.

Démonstration. – Nous définissons la fonction a qui intervient dans le Théorème par la formule $a(x) = |u_0(x)| + \int_{P_x} b(y)\, dy$ et l'application F par la formule $F(x\,,u)(y) = f(x\,,y\,,u)$. F est une application continue $X \times C(X\,;\,R^n) \to C(X\,;\,R^n)$. En effet, soit K un compact de l'espace X et ε un nombre positif; puisque

$$|F(\bar{x}\,,\bar{u})(y) - F(x\,,u)(y)| = |f(\bar{x}\,,y\,,\bar{u}) - f(x\,,y\,,u)|$$

alors, en appliquant le Lemme cité (p. 2) nous trouvons un voisinage V_x du point $x \in X$ et un voisinage W_u de la fonction $u \in C(X\,;\,R^n)$ tels que $\sup_{y \in K} |F(\bar{x}\,,\bar{u})(y) - F(x\,,u)(y)| < \varepsilon$ ce qui montre la continuité de F.

Sur l'ensemble $C(X\,;\,R^n)$ la topologie induite par l'espace S est moins fine que la topologie de la convergence compacte:

$$|u|_A = \int_A |u(y)|\, dy \leqq \mu(A) \sup_{y \in K} |u(y)|\,,$$

K étant un compact qui contient l'ensemble $A \in \Gamma$. Alors F est une application continue $X \times C(X\,;\,R^n) \to S$ et les conditions du Théorème sont remplies.

Pour que la fonction b vérifie les conditions du corollaire précédent il est suffisant que b soit sommable et $\lim_{y \to x} \mu(P_x \Delta P_y) = 0$. Dans ces circonstances nous établirons le

COROLLAIRE 2. – *Soit g une application* $X \times X \times R^n \to R^n$, $|g(x,y,z)| \leqq b(y)$ *et u_0 une fonction bornée de* $C(X; R^n)$. *Soit Q une application* $X \to \Gamma$ *telle que* $\lim_{y \to x} \mu(Q_x \Delta Q_y) = 0$. *Alors l'équation* $u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} g\left(x, y, \int_{Q_y} u(t)\, dt\right) dy$ *a, au moins, une solution bornée dans* $C(X; R^n)$.

Démonstration. – Nous définissons à nouveau $a(x) = |u_0(x)| + \int_{P_x} b(y)\, dy$ et soit $M = \sup |u_0(x)| + \int_X b(y)\, dy$. Alors nous aurons $|u(x)| \leqq M$ pour tout $u \in L$ et tout $x \in X$. L'opérateur $h: X \times X \times L \to R^n$ défini par $h(x, y, u) = g\left(x, y, \int_{Q_y} u(t)\, dt\right)$ est continu. En effet, soient $(x, y, u) \in X \times X \times L$ et η un nombre positif; on peut déterminer un voisinage V de x, un voisinage W de y et un nombre positif δ tels que

$$|h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) - h(x, y, u)| = \left| g\left(\bar{x}, \bar{y}, \int_{Q_{\bar{y}}} \bar{u}(t)\, dt\right) - g\left(x, y, \int_{Q_y} u(t)\, dt\right)\right| < \eta$$

pour $\bar{x} \in V$, $\bar{y} \in W$ et $\left| \int_{Q_{\bar{y}}} \bar{u}(t)\, dt - \int_{Q_y} u(t)\, dt \right| < \delta$.

Mais, pour $\bar{u} \in L$

$$\left| \int_{Q_{\bar{y}}} \bar{u}(t)\, dt - \int_{Q_y} u(t)\, dt \right| \leqq \left| \int_{Q_{\bar{y}}} \bar{u}(t)\, dt - \int_{Q_y} \bar{u}(t)\, dt \right| + \left| \int_{Q_y} \bar{u}(t)\, dt - \int_{Q_y} u(t)\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq M\mu(Q_{\bar{y}} \Delta Q_y) + \mu(Q_y) \sup_{t \in Q_y} |\bar{u}(t) - u(t)|.$$

Soit W_1 un voisinage de y tel que $\mu(Q_{\bar{y}} \Delta Q_y) \leqq \delta/2M$ pour $\bar{y} \in W_1$. Soit K un compact qui contient Q_y. Alors

$$|h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) - h(x, y, u)| < \eta$$

si $\bar{x} \in V$, $\bar{y} \in W \cap W_1$, $\bar{u} \in L$ et $\sup_{t \in K} |\bar{u}(t) - u(t)| < \frac{\delta}{2\mu(Q_y)}$.

Donc h est continu; il suit, voir la démonstration du corollaire précédent, que l'application $F: X \times L \to S$ de la forme $F(x, y)(y) = h(x, y, u) = g\left(x, y, \int_{Q_y} u(t)\, dt\right)$ est continue; les conditions du Théorème sont remplies.

COROLLAIRE 3. – *En prenant dans le Théorème* $X = R_+$, $P_x = [0, x]$ *et* F *une application continue* $L \to C(R_+; R^n)$ *alors nous retrouvons un résultat de C. Corduneanu* ([1], *Théorème 2*).

§ 4. Dans la suite nous supposons que l'espace $C(X; R^n)$ soit métrisable. Cette condition est réalisée, par exemple, si dans l'espace X il esiste une suite de compacts (K_n) telle que pour tout compact K de X il existe un n tel que $K_n \supset K$. Soient a une application non-negative définie sur X et G l'ensemble

$$G = \{(y, z) \; ; \; y \in X \; , \; z \in R^n \; , \; |z| \leqq a(y)\} .$$

COROLLAIRE 4. – *Soit* f *une application* $G \to R^n$ *qui vérifie les conditions suivantes*:

(1) *L'application* $X \to R^n$ *de la forme* $y \to f(y, z)$ *est mesurable sur chaque ensemble* A *de* Γ *pour tout* z; *l'application* $R^n \to R^n$ *de la forme* $z \to f(y, z)$ *est continue pour tout* $y \in X - Z$, Z *étant un ensemble de mesure nulle de* X.

(2) $|f(y, z)| \leqq b(y)$, b *étant une application* $X \to R$ *sommable sur tout ensemble de* Γ.

Si l'on suppose de plus que b *et* u_0 *vérifient les conditions* (3) *et* (4) *du Théorème alors l'équation*

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(y, u(y)) \, dy$$

a une solution dans $C(X; R^n)$.

Pour démontrer cela il est suffisant de vérifier le

LEMME. – *Soit* f *une application* $G \to R$ *qui satisfait les conditions* (1) *et* (2) *du Corollaire* 4. *Alors l'application* $L \to S$ *de la forme* $(Fu)(y) = f(y, u(y))$ *est continue.* (L *et* S *sont les ensembles qui interviennent dans le Théorème*).

Démonstration. – D'abord nous verrons que $F(u) \in S$ pour tout $u \in L$. Soient A un ensemble de Γ, v une fonction étagée $X \to R^n$, $v = \Sigma_i v_i \chi_{A_i}$ où $v_i \in R^n$, les ensembles $A_i \in \Gamma$, $1 \leqq i \leqq p$, forment une partition pour A et $|v(x)| \leqq a(x)$ $(\forall x \in X)$. Alors la fonction

$$f(y, v(y)) \chi_A(y) = \begin{cases} f(y, v_1) & \text{pour} \quad y \in A_1 \\ \vdots & \\ f(y, v_p) & \text{pour} \quad y \in A_p \\ 0 & \text{pour} \quad y \in X - A \end{cases}$$

est sommable d'après l'hypothèse. D'autre part, pour $u \in L$ il existe une suite de fonctions étagées du type v qui converge uniformément sur A à u (voir [6], démonstration de la remarque 2). Alors, grâce à la condition 1, il suit que $\lim\limits_n f(y, u_n(y)) = f(y, u(y))$ pour $y \in A - Z$ et la sommabilité sur A, de $F(u)$, sont une conséquence de la condition 2. Maintenant nous férons une remarque. Il est bien connu que si Y et T sont deux espaces métriques alors pour la continuité d'une application $g : Y \to T$ il est suffisant que pour tout $y \in Y$ et toute suite y_n convergente vers y soit $\lim g(y_n) = g(y)$.

Cette affirmation reste vraie dans le cas où T est seulement un espace topologique. En effet si D est un ensemble fermé de T alors son image réciproque $g^{-1}(D)$ est fermée dans $Y : y_n$ étant une suite de $g^{-1}(D)$ telle que $\lim y_n = y$ alors, par l'hypothèse, $\lim g(y_n) = g(y)$. Mais $g(y_n) \in D$ qui est fermé; alors $g(y) \in D$ et $y \in g^{-1}(D)$.

Soit dans l'ensemble L une suite u_n convergente à u et soit A un élément de Γ. Il suit que u_n converge uniformément sur A et, grâce à la condition (1), il résulte que

$$\lim_n f(y, u_n(y)) = f(y, u(y)) \qquad \text{pour} \quad y \in A - Z.$$

En appliquant la condition 2 on peut écrire, en vertu du Théorème de Lebesgue, que

$$\lim_n \int_A |f(y, u_n(y)) - f(y, u(y))| \, dy = 0$$

ou $\lim |Fu_n - Fu|_A = 0$ et la continuité de l'opérateur $F : L \to S$ résulte de l'hypothèse fondamentale que l'espace $C(X; R^n)$ est métrisable.

Rémarque 1. – Le Lemme peut être formulé sans la condition 2 si on remplace l'espace S par l'espace M des fonctions $X \to R^n$ mesurables sur les éléments de Γ muni de la topologie définie par la famille de semi-normes

$$\int_A \min(\gamma(x), |u(x)|) \, dx$$

où A est un élément de Γ et γ est une fonction fixée $X \to R_+$, sommable sur chaque élément de Γ.

Si l'on choisit $\gamma(x) \equiv 1$ alors l'opérateur intégrale qui s'obtient est, pour X = intérvalle compact de R et $P_x = [0, x]$, du type analisé par K. Karták [4] et I. Vrkoč [8].

Remarque 2. – Admettons, de plus, que l'espace X est métrique. Alors le résultat du Corollaire 4 s'étend à l'équation

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, u(y)) \, dy$$

f étant une application définie sur

$$G_1 = \{(x, y, z) ; x \in X, y \in X, z \in R^n, |z| \leq a(y)\},$$

qui prend ses valeurs dans R, est mesurable en y sur tout compact pour tout x et z et est continue dans (x, z) pour prèsque tout y (les conditions (2)–(4) restent inchangées).

Exemple. – Si X est un intervalle compact de R et $P_x = [0, x]$ on obtient de cette dernière remarque un résultat de T. Sato [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CORDUNEANU, *Sur certaines équations fonctionnelles de Volterra.* « Funkcialaj Ekvacioj », *9* (1–3), 119–127 (1966).

[2] A. HAIMOVICI, *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble*, « Rev. Roum. de Math. pure et appl. », *9*, 207–210 (1964).

[3] A. HAIMOVICI, *Sur le problème de Cauchy pour des équations dont les inconnues sont des fonctions d'ensemble*, « An. St. ale Univ. ' Al. I. Cuza ' din Iași, s. I, Mat. », *13*, f. 2, 285–289 (1967).

[4] K. KARTÁK, *A generalization of the Carathéodory theory of differential equations*, « Czech. Math. J. ». *17* (92), 482–514 (1967).

[5] T. SATO, *Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra*, « Compositio Math. », *11*, 271–290 (1953).

[6] S. SOLOMON, *Sur une généralisation de l'équation de Volterra*, « An. St. ale Univ. ' Al. I. Cuza ', Iași, s. I, Mat. », *15*, f. 1, 71–82 (1969).

[7] S. SOLOMON, *Sur les équations fonctionnelles de Volterra*, « C. R. Acad. Sc. Paris », t. 268, 150–152 (1969).

[8] I. VRKOČ, *The representation of Carathéodory operators*, « Czech. Math. J. », *19*, 99–109 (1969).