
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GUIDO ZAPPA

Su certe varietà di gruppi di esponente limitato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.5, p. 287–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_287_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Su certe varietà di gruppi di esponente limitato* (*).

Nota (**) del Corrisp. GUIDO ZAPPA.

SUMMARY. — Let G be a finite group. Then the exponent of G divides $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_r$, p_i odd prime, $i = 1, \dots, r$) and the order of every principal factor of G is p_i or p_i^2 ($i = 1, \dots, r$) if and only if the laws (1), (2), (3) of the Theorem 2.1 are satisfied in G . Some varieties generated by groups of this kind are characterized.

In una Nota precedente [6] ho studiato la varietà V generata dai gruppi finiti il cui esponente divida un intero positivo dispari dato n , e i cui fattori principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un numero primo. Precisamente, se $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ primi dispari) e se si pone $m_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), un gruppo finito G appartiene a V se e solo se esso verifica le seguenti leggi:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x_1^n; \quad (2) \quad (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \quad (3) \quad [x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i} (p_i^2 - 1)} \\
 & (i = 1, 2, \dots, r); \\
 (4) \quad & [[x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, [x_3, x_4]^{n p_j^{-a_j}}] \quad (i = 1, 2, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r).
 \end{aligned}$$

Nella suddetta Nota, ponevo il problema di vedere se la validità delle leggi (1), (2), (3) in un gruppo finito implicasse necessariamente la validità delle (4). In questo lavoro, provo che ciò è vero. Di conseguenza, mostro che se W è una varietà localmente finita, definita da un insieme L di leggi, la sottovarietà di W generata dai gruppi ad essa appartenenti, il cui esponente divida n e i cui fattori principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un numero primo, è definita dall'insieme di leggi costituito da L e dalle (1), (2) e (3). In particolare, viene determinata una base per le leggi della varietà generata dai gruppi finiti il cui esponente divide l'intero dispari $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, i cui p_i -sottogruppi di Sylow abbiano classe di nilpotenza $\leq c_i$ ($i = 1, \dots, r$) e i cui fattori principali abbiano ordine primo o quadrato di un numero primo. Colgo anche l'occasione per rettificare gli enunciati di alcuni Teoremi che in [5] e [6] avevo formulato in modo inesatto.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1971.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca « Strutture algebriche e geometriche e applicazioni » del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R. (Sezione n. 6).

1. Proviamo anzitutto la seguente proposizione:

1.1. Sia $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ numeri primi dispari), sia $m_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($i = 1, \dots, r$) e sia G un gruppo finito in cui valgono le leggi

$$(1) \quad x_1^n; \quad (2) \quad (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \quad (3) \quad [[x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i(p_i^2-1)}}] \\ (i = 1, \dots, r).$$

Allora in G valgono anche le leggi

$$(4) \quad [[x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, [x_3, x_4]^{n p_j^{-a_j}}], \quad (i = 1, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r).$$

Per provare questa proposizione, ci si basa sul corollario 5.10 di R. Baer [1]. Data una classe Θ di coppie ordinate (A, B) di proprietà gruppali A e B , e dati un gruppo G e un suo sottogruppo normale N , Baer dice che vale $N\Theta G$ se, per ogni omomorfismo σ di G su un gruppo H con $N^\sigma \neq 1$, esistono una coppia (A, B) in Θ e un sottogruppo normale M di H con $1 < M \leq N^\sigma$ tale che M gode della proprietà A e il gruppo di automorfismi indotto da H in M gode della proprietà B .

Indicato poi con $e(p)$ un intero ≥ 0 funzione del numero primo p , Baer indica con $A'_e(p)$ la classe dei p -gruppi finiti abeliani elementari il cui rango divide $e(p)$, e con $B'_e(p)$ la classe dei gruppi abeliani; indica poi con Θ'_e la famiglia delle coppie $(A'_e(p), B'_e(p))$.

Il corollario 5.10 di Baer, nell'ipotesi che G sia finito d'ordine dispari e che N coincida col derivato G' di G , dice che:

Se $0 < e(p) \leq 2$, vale $G' \Theta'_e G$ se e solo se:

(b) $[x^{p^{e(p)}-1}, y] = 1$ per ogni primo p , ogni p -elemento y in G' e ogni elemento x in G tale che il periodo relativo di x rispetto al centralizzante di G' in G sia primo con p .

(Si noti infatti che nel nostro caso le condizioni (a) e (c) di detto corollario sono banalmente soddisfatte).

Sia ora G un gruppo finito in cui valgano le leggi (1), (2) e (3). Essendo n dispari per ipotesi, e valendo la (1), G è di esponente dispari, quindi anche d'ordine dispari. Si ponga $e(p) = 2$ per ogni numero primo p .

Mostriamo ora che in G è verificata la condizione (b) del suddetto corollario di Baer. In base alla (2), G è disperso, cioè ha un sottogruppo normale d'ordine m_i ($i = 1, \dots, r$). In base al n. 3.4 di [5] il sottogruppo generato dai p_i -elementi di G' coincide col sottogruppo generato dagli elementi della forma $[a, b]^{n p_i^{-a_i}}$. In base alla (3), allora, ogni p_i -elemento di G' è permutabile con la potenza $(p_i^2 - 1)$ -esima di ogni elemento di G di periodo primo con p_i . Sia ora x un elemento di G , il cui periodo relativo k rispetto al centralizzante $C_G(G')$ di G' in G sia primo con p_i . Sia h il periodo relativo di $x^{p_i^2-1}$ rispetto a $C_G(G')$. Allora h divide k , onde è primo con p_i . Sia $w = x^{p_i^2-1}$. Detto $p_i^u \cdot t$

il periodo di w^h (t primo con p_i) si ha che il periodo di w è p_i^{th} con th primo con p_i . Allora esistono due interi c, d tali che

$$(I) \quad w = (w^{p_i^{th}})^c (w^{th})^d.$$

Il periodo di $x^{p_i^{th}}$ divide $(p_i^2 - 1)th$, cioè è primo con p_i , onde $(x^{p_i^{th}})^{p_i^2-1} = w^{p_i^{th}}$ è permutabile con ogni p_i -elemento $y \in G'$, in base alle (3). Inoltre w^{th} , quale potenza di w^h , è in $C_G(G')$, quindi è permutabile con ogni elemento di G' , e in particolare con ogni p_i -elemento $y \in G'$. Ne segue, in base alla (I), che w è permutabile con ogni elemento $y \in G'$, cioè si ha $[x^{p_i^{th}}, y] = 1$ per ogni p_i -elemento $y \in G'$ e ogni $x \in G$ tale che il periodo relativo di x rispetto a $C_G(G')$ sia primo con p_i . Pertanto la (b) del corollario di Baer è verificata per $p = p_1, \dots, p_r$. Essa poi è banalmente verificata per ogni numero primo $p \neq p_1, \dots, p_r$.

In base al corollario 5.10 di Baer [1], si ha che vale $G' \Theta'_i G$.

Sia ora $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \leq Z_l \leq \dots$ la serie centrale ascendente di G' . Proviamo che, se $Z_l \neq G'$, è $Z_l \neq Z_{l+1}$ ($l = 0, 1, \dots$). Sia σ l'omomorfismo di G' su G'/Z_l . Essendo $Z_l \neq G'$, si ha $G'^\sigma = G'/Z_l \neq 1$. Allora, valendo $G' \Theta'_i G$, esiste un sottogruppo normale $M/Z_l \neq 1$ di G'/Z_l che risulta abeliano elementare d'ordine divisore di p_i^2 (per un certo i tale che $1 \leq i \leq r$), ed è tale che il gruppo degli automorfismi indotti in M/Z_l dagli elementi di G/Z_l sia abeliano. Ne segue che ogni elemento di $(G/Z_l)'$ induce in M/Z_l l'automorfismo identico, cioè M/Z_l è nel centro di $(G/Z_l)'$. Ma $(G/Z_l)' = G'/Z_l$, onde M/Z_l è nel centro di G'/Z_l , cioè $M \leq Z_{l+1}$. Poiché $M/Z_l \neq 1$, cioè $Z_l \neq M$, si ha $Z_l \neq Z_{l+1}$. La serie centrale ascendente di G' termina quindi con G' , cioè G' è nilpotente. Poiché esso è finito, se i, j sono due interi distinti tali che $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$, si ha che ogni p_i -elemento di G' è permutabile con ogni p_j -elemento di G' . Poiché, se $x_1, x_2 \in G$, $[x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}$ è un p_i -elemento di G' , si ha che in G valgono le leggi (4) come si voleva.

In [6] avevo provato che la varietà V generata dai gruppi finiti il cui esponente divide $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \dots > p_r$, primi dispari) e i cui fattori principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un numero primo coincide con quella generata dai gruppi finiti in cui valgono le leggi (1), (2), (3), (4). In base a 1.1, possiamo ora affermare:

1.2. *Un gruppo finito G verifica le proprietà:*

a) *l'esponente di G divide l'intero $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \dots > p_r$, primi dispari);*

b) *i fattori principali di G hanno tutti ordine primo o quadrato di un numero primo;*

se e solo se in esso valgono le seguenti leggi:

$$(I) \quad x_1^n; \quad (2) \quad (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \quad (3) \quad [[x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)}] \\ (i = 1, 2, \dots, r),$$

ove si sia posto $m_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Osservazione. L'enunciato del Teorema 3.1 della Nota [6] è in realtà inesatto. Precisamente, nella dimostrazione di tale Teorema, ho provato soltanto che un gruppo finito verifica le proprietà *a*) , *b*) di cui all'enunciato ora scritto se e solo se in esso valgono le leggi (1), (2), (3), (4), e quindi la varietà generata dai gruppi finiti verificanti le *a*) e *b*) coincide con quella generata dai gruppi finiti per cui valgono le leggi (1), (2), (3), (4). Questa doveva essere l'esatta formulazione del Teorema 3.1 della Nota [6]. Invece l'enunciato di tale Teorema asserisce che la varietà generata dai gruppi finiti verificanti le proprietà *a*) e *b*) è definita dalle leggi (1), (2), (3), (4), il che non è sempre vero, perché la varietà *V* definita da tali leggi non è necessariamente localmente finita, e quindi può non coincidere con la varietà generata dai gruppi finiti che appartengono a *V*.

Analoghe correzioni vanno apportate agli enunciati dei Teoremi 1.2 e 4.1 di [5].

2. Dal Teorema precedente discende:

2.1. *Sia W una varietà localmente finita di gruppi, e sia L una base per le leggi di W. Sia U la sottovarietà di W generata dai gruppi finiti ad essa appartenenti, il cui esponente divida l'intero $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ primi dispari) e i cui fattori principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un primo. Allora una base per le leggi di U si ottiene aggiungendo ad L le leggi*

$$(1) \quad x_1^n; \quad (2) \quad (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \quad (3) \quad [x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

ove si sia posto $m_i = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Sia *T* la varietà definita dalle leggi appartenenti ad *L* e dalle (1), (2), (3). Mostriamo che $U \leq T$ e $T \leq U$. La *U* è generata dai gruppi finiti appartenenti a *W* e verificanti le condizioni *a*) e *b*) del Teorema 1.2, quindi, in base a detto Teorema, le (1), (2), (3) sono verificate dai gruppi appartenenti ad *U*; ma essendo $U \leq W$, anche le leggi appartenenti ad *L* sono verificate da tali gruppi; quindi le leggi che definiscono *T* valgono in *U*, cioè $U \leq T$.

Viceversa, è $T \leq W$ perché *W* è definita dalle leggi appartenenti ad *L*, e in *T* valgono dette leggi. Poiché *W* è localmente finita, anche *T* lo è. Poiché ogni varietà è generata dai gruppi finitamente generabili che le appartengono, *T* è generata dai gruppi finiti che le appartengono. Ma in tali gruppi valgono le (1), (2), (3), quindi, in base al Teorema 1.2, essi verificano le *a*) e *b*) di tale Teorema. Poiché essi verificano anche le leggi in *L*, e quindi appartengono a *W*, si ha che tali gruppi appartengono ad *U*. Essendo pertanto *T* generata da gruppi appartenenti ad *U*, si ha $T \leq U$. Ne segue $T = U$, e il Teorema è provato.

Di qui segue:

2.2. *Sia W la varietà generata dai gruppi finiti il cui esponente divida $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ ($p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ numeri primi dispari), i cui fattori*

principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un primo, e i cui p_i -sottogruppi di Sylow siano nilpotenti di classe $\leq c_i$ ($i = 1, \dots, r$). Allora W è definita dalle seguenti leggi:

$$(1) \quad x_1^n; \quad (2) \quad (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \quad (3) \quad [x_1, x_2]^{n p_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i} (p_i^2 - 1)}; \\ (4) \quad [x_1^{n p_i^{-a_i}}, x_2^{n p_i^{-a_i}}, \dots, x_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}}]^{m_{i-1}} \quad (i = 1, \dots, r),$$

ove si sia posto $m_0 = 1$, $m_i = p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i}$ ($i = 1, \dots, r$).

Sia U la varietà definita dalle leggi (1), (2), (3), (4). In W valgono le leggi (1), (2), (3) in base a 1.2. Ma in W valgono anche le leggi (4). Sia infatti G un gruppo finito $\in W$, e siano $a_1, a_2, \dots, a_{c_i+1}$ elementi di G . Essendo ogni elemento di G di periodo divisore di n , si ha che $a_1^{n p_i^{-a_i}}, \dots, a_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}}$ sono p_i -elementi di G . Poiché in G valgono le (2) detto π_i l'insieme dei numeri primi $p_1, \dots, p_i$, si ha che il prodotto di due π_{i-1} -elementi di G è ancora un π_{i-1} -elemento di G , cioè i π_{i-1} -elementi di G formano un sottogruppo N_{i-1} necessariamente normale ($i = 1, \dots, r$). Di conseguenza N_i/N_{i-1} è un p_i -sottogruppo di Sylow normale di G/N_{i-1} , e quindi è nilpotente di classe $\leq c_i$. Ne segue

$$[a_1^{n p_i^{-a_i}} N_{i-1}, \dots, a_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}} N_{i-1}] = 1$$

cioè

$$[a_1^{n p_i^{-a_i}}, \dots, a_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}}] \in N_{i-1}$$

e poiché l'esponente di N_{i-1} divide m_{i-1} , si ha

$$[a_1^{n p_i^{-a_i}}, \dots, a_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}}]^{m_{i-1}} = 1$$

cioè in G valgono le (4).

Pertanto $W \leq U$.

Per mostrare che è $U \leq W$, facciamo anzitutto vedere che U è localmente finita. Sia $G \in U$. Se $r = 1$, cioè $n = p_1^{a_1}$, le (4) si riducono ad una sola, che diviene $[x_1, x_2, \dots, x_{c_1+1}]$, onde G è nilpotente di classe c . Un sottogruppo di G con un numero finito di generatori è periodico, perché di esponente divisore di n , e nilpotente, onde (vedi ad esempio, W. R. Scott [4] eserc. 8.4.36) è finito. Quindi G è localmente finito. Procediamo ora per induzione rispetto ad r . Valendo in G le (2), gli elementi di G di periodo primo con p_r formano un sottogruppo N normale in G , di esponente divisore di $m_{r-1} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{r-1}^{a_{r-1}}$, onde in N vale la legge $x_1^{m_{r-1}}$. Poiché in N valgono anche le (2), (3), (4) per $i = 1, 2, \dots, r-1$, per l'ipotesi di induzione N è localmente finito. Inoltre G/N ha esponente divisore di $p_r^{a_r}$. Dall'ultima delle (4) segue che, se $a_1 N, a_2 N, \dots, a_{c_r+1} N$ sono elementi di G/N , è

$$[a_1^{m_{r-1}} N, a_2^{m_{r-1}} N, \dots, a_{c_r+1}^{m_{r-1}} N]^{m_{r-1}} = N.$$

Ma gli elementi di G/N hanno periodo primo con m_{r-1} , onde ogni tale elemento è potenza (m_{r-1}) -ma, cioè ogni elemento di G/N può mettersi nella forma $a^{m_{r-1}}N$ con a in G . Ne segue che è

$$[a_1N, a_2N, \dots, a_{c_r+1}N]^{m_{r-1}} = N.$$

Ma poiché gli elementi di G/N hanno periodo primo con m_{r-1} , ogni $b \in G/N$ è potenza di $b^{m_{r-1}}$. Ne segue

$$[a_1N, a_2N, \dots, a_{c_r+1}N] = N$$

cioè G/N è nilpotente di classe $\leq c_r$, quindi, essendo periodico, è localmente finito.

Essendo N e G/N localmente finiti, anche G , in base ad un Teorema di Schmidt (cfr. E. Schenkman [3], III, 6, q) è localmente finito, e U risulta localmente finita, quindi generata dai suoi gruppi finiti (cfr. H. Neumann [2], 15.61).

Sia ora G un gruppo finito appartenente ad U . Poiché in G valgono le (1), (2), (3), si ha, in base a 2.1., che l'esponente di G divide n e i suoi fattori principali hanno tutti ordine primo o quadrato di un numero primo. Valendo inoltre in G le (4), si ha che i p_i -sottogruppi di Sylow di G sono nilpotenti di classe $\leq c_i$ ($i = 1, \dots, r$). Infatti, in un p_i -sottogruppo di Sylow P_i di G deve esser legge la parola $[x_1^{n p_i^{-a_i}}, x_2^{n p_i^{-a_i}}, \dots, x_{c_i+1}^{n p_i^{-a_i}}]^{m_{i-1}}$. Ma poiché i periodi degli elementi di P_i sono primi con $n p_i^{-a_i}$, al variare di x in P_i anche $x^{n p_i^{-a_i}}$ descrive tutto P_i , onde in P_i è legge anche la parola $[x_1, x_2, \dots, x_{c_i+1}]^{m_{i-1}}$. Poiché m_{i-1} è anch'esso primo coi periodi degli elementi di P_i , in G è legge anche la parola $[x_1, x_2, \dots, x_{c_i+1}]$, onde P_i è nilpotente di classe $\leq c_i$ ($i = 1, \dots, r$). Ne segue $G \in W$. Ogni gruppo finito appartenente a U appartiene quindi a W , e poiché U è generata dai suoi gruppi finiti, si ha $U \leq W$. Essendo $W \leq U$, segue $U = W$, e il Teorema è provato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BAER, *Principal factors, maximal subgroups and conditional identities of finite groups*, « Illinois Journal of Math. », 13, 1-51 (1969).
- [2] HANNA NEUMANN, *Varieties of groups*, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
- [3] E. SCHENKMAN, *Group theory*, Princeton, 1965.
- [4] W. R. SCOTT, *Group theory*, Englewood Cliffs, 1964.
- [5] G. ZAPPA, *Su alcune varietà generate da gruppi supersolubili*, 25, 182-191 (1970).
- [6] G. ZAPPA, *Sulla varietà generata da certi gruppi risolubili*, « Rend. Accad. Nazionale dei Lincei » (in corso di stampa).