
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCESCO SUCCI

Spazi $(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ -misti generali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.5, p. 282–286.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_5_282_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Spazi $(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ -misti generali.* Nota di FRANCESCO SUCCI, presentata (*) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Some results on a general theory of the $(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ -mixed spaces are given.

INTRODUZIONE

Per lo studio degli insiemi analitici si è riconosciuto conveniente considerare accanto alle funzioni analitiche anche quelle differenziabili, cioè si è riconosciuto conveniente associare strutture differenziabili alle strutture analitiche. Si vedano a questo riguardo i lavori degli ultimi anni di B. Malgrange, K. Spallek, T. Bloom ed altri.

Seguendo questo ordine di idee si introduce in questa Nota una generalizzazione al caso differenziabile C^k della nozione di spazio $(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ -misto, o brevemente *spazio misto*, e cioè di uno spazio anellato localmente isomorfo a sottoinsiemi chiusi di spazi $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$ anellati in $\mathbf{C}$ -algebre, definiti da ideali chiusi e coerenti nel senso di Grothendieck. (Cfr. M. Jurchescu [2] [3]).

Un secondo tipo di generalizzazione che qui si considera riguarda gli ideali che definiscono i modelli dello spazio misto, ideali che si suppongono soltanto di tipo finito.

Per tali spazi misti generali si danno qui alcuni primi risultati. Ulteriori sviluppi della teoria (morfismi finiti, forme differenziali ecc.) saranno oggetto di un prossimo lavoro.

Si fa uso della nozione di *spazio bi-anellato* introdotta da M. Jurchescu in [3].

1. LA CATEGORIA DEI MODELLI

Sia $\mathbf{R}^p = \{(t_1, \dots, t_p)\}$, $\mathbf{C}^q = \{(t_{p+1}, \dots, t_{p+q})\}$, $\mathbf{M}^{p,q} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$, $\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}$ il fascio su $\mathbf{M}^{p,q}$ delle funzioni a valori complessi di classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) in $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{2q}$ (immagine reale di $\mathbf{M}^{p,q}$) e di classe C^ω in $\{t\} \times \mathbf{C}^q$, $\forall t \in \mathbf{R}^p$, (cioè analitiche nelle variabili $t_{p+1}, \dots, t_{p+q}$), $\mathcal{O}'_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}$ il sottofascio di $\mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}$ delle funzioni che si fattorizzano attraverso $\mathbf{R}$ (e quindi non dipendono dalle variabili complesse).

$\mathbf{M}_k^{p,q} = (\mathbf{M}^{p,q}, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)})$ è dunque uno spazio anellato in $\mathbf{C}$ -algebre con un sottofascio privilegiato di $\mathbf{R}$ -algebre $\mathcal{O}'_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}$ (delle « sezioni reali »); esso è cioè uno spazio bi-anellato $(\mathbf{M}^{p,q}, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}, \mathcal{O}'_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)})$ (Cfr. M. Jurchescu, [3]).

Gli spazi bi-anellati $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}'_X)$ in $\mathbf{C}$ -algebre ed $\mathbf{R}$ -algebre e i loro morfismi (definiti in modo ovvio, cfr. Definizione 1.3) costituiscono una cate-

(*) Nella seduta del 13 novembre 1971.

goria, *Ann-2*. Gli spazi bi-anellati con fasci strutturali aventi per fibre $\mathcal{O}_{X,x}, (\mathcal{O}'_{X,x})$, $x \in X$, anelli locali con corpo residuo isomorfo a $\mathbf{C}$ (risp. ad $\mathbf{R}$) costituiscono una sottocategoria piena *Loc-2* di *Ann-2*. Si ha, [3]:

LEMMA 1.1. — $\mathbf{M}_k^{p,q}$ ed ogni suo sottospazio, quali spazi bi-anellati, sono oggetti di *Loc-2*.

DEFINIZIONE 1.2. — Dicesi *modello locale di spazio misto di classe C^k* ogni sottospazio bi-anellato $(S, \mathcal{O}_S^{(k)}, \mathcal{O}_S'^{(k)})$ di presentazione finita di uno spazio $\mathbf{M}_k^{p,q}$.

Cioè S è un sottoinsieme localmente chiuso di $\mathbf{R}^p \times \mathbf{C}^q$ definito da un ideale $\mathfrak{J}$ di tipo finito di $\mathcal{O}_W^{(k)} = \mathcal{O}_{\mathbf{M}_k^{p,q}}^{(k)}|_W$, dove $W = S \cup (\mathbf{M}_k^{p,q} \setminus \bar{S})$ [1].

Indicheremo con $j_S: S \rightarrow \mathbf{M}_k^{p,q}$ il morfismo strutturale del sottospazio S .

DEFINIZIONE 1.3. — Se S, S' sono due modelli e $j_S: S \rightarrow \mathbf{M}_k^{p,q}$, $j_{S'}: S' \rightarrow \mathbf{M}_k^{p',q'}$ i loro morfismi strutturali, un *morfismo di modelli*:

$$\varphi: S \rightarrow S'$$

è un morfismo di spazi bi-anellati (cioè tale che esista $\varphi'_1: \mathcal{O}'_{S'} \rightarrow \varphi_{0*}(\mathcal{O}'_S)$ per cui sia commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_{S'} & \xrightarrow{\varphi'_1} & \varphi_{0*}(\mathcal{O}'_S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{S'} & \xrightarrow{\varphi_1} & \varphi_{0*}(\mathcal{O}_S) \end{array}$$

taile che $\forall s \in S$ esista un sottospazio bi-anellato $U \subset \mathbf{M}_k^{p,q}$ contenente s ed un morfismo di spazi bi-anellati $\psi: U \rightarrow \mathbf{M}_k^{p',q'}$ in modo che si abbia il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \cap S & \xrightarrow{\quad} & U \\ \varphi|_{U \cap S} \downarrow & & \downarrow \psi \\ S' & \xrightarrow{j_{S'}} & \mathbf{M}_k^{p',q'} \end{array}$$

OSSERVAZIONE 1.4. — I modelli di spazi misti di classe C^k e i loro morfismi costituiscono una categoria, la *categoria dei modelli*.

DEFINIZIONE 1.5. — Si dirà che un modello S di spazio misto di classe C^k ($k \geq 1$) soddisfa in $s_0 \in S$ la proprietà (P) se esiste in $\mathbf{M}_k^{p,q}$ un intorno aperto $U(s_0)$ di s_0 tale che per l'ideale $\mathfrak{J}$ che definisce S come sottospazio di $\mathbf{M}_k^{p,q}$, si abbia

$$(P): \quad (\mathfrak{J}_s \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{M}_k^{p,q},s}^{(k-1)}) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{M}_k^{p,q},s}^{(k)} = \mathfrak{J}_s, \quad \text{per ogni } s \in U(s_0) \cap S.$$

Si dirà che S soddisfa (P) se la soddisfa in ogni suo punto.

2. - SPAZI MISTI

Sia $X = (X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}'_X)$ uno spazio bi-anellato in $\mathbf{C}$ -algebre ed in $\mathbf{R}$ -algebre.

DEFINIZIONE 2.1. - Una carta di spazio misto di classe C^k su X è una coppia (U, ξ) , dove U è un sottospazio bi-anellato aperto di X e ξ è una immersione, [1], di U in uno spazio $\mathbf{M}_k^{p,q}$ tale che $\text{Im } \xi = \xi(U)$ sia un modello di spazio misto di classe C^k .

OSSERVAZIONE 2.2. - Se (U, ξ) è una carta su X ed U_1 è un sottospazio bi-anellato aperto di U , allora anche $(U_1, \xi|_{U_1})$ è una carta di X .

DEFINIZIONE 2.3. - Due carte $(U, \xi), (U', \xi')$ su X si dicono compatibili se il morfismo di spazi bi-anellati $\xi(U \cap U') \rightarrow \xi'(U \cap U')$ indotto dall'identità di $U \cap U'$ è un isomorfismo di modelli.

LEMMA 2.4. - La compatibilità delle carte è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le carte su X .

DEFINIZIONE 2.5. - Una classe di equivalenza di carte i cui aperti ricoprono X si dice atlante di spazio misto di classe C^k su X .

DEFINIZIONE 2.6. - Uno spazio misto di classe C^k è una coppia $(X, \mathcal{A}_X^{(k)})$ dove $X = (X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}'_X)$ è uno spazio bi-anellato e $\mathcal{A}_X^{(k)}$ è un atlante di spazio misto di classe C^k su X , (atlante strutturale di X). Si scriverà brevemente $X = (X, \mathcal{A}_X^{(k)})$.

DEFINIZIONE 2.7. - Siano X, Y due spazi misti di classe C^k . Un morfismo di spazi misti $\varphi: X \rightarrow Y$ è un morfismo di spazi bi-anellati tale che per ogni carta $(U, \xi) \in \mathcal{A}_X^{(k)}$ ed ogni carta $(V, \eta) \in \mathcal{A}_Y^{(k)}$ il morfismo

$$\xi(U \cap \varphi^{-1}(V)) \rightarrow \eta(V)$$

indotto da φ , sia un morfismo di modelli.

OSSERVAZIONE 2.8. - Gli spazi misti di classe C^k ed i loro morfismi costituiscono una categoria che indicheremo con Em .

DEFINIZIONE 2.9. - Si dirà che uno spazio misto $(X, \mathcal{A}_X^{(k)})$ soddisfa la proprietà (P) se ogni carta (U, ξ) di $\mathcal{A}_X^{(k)}$ la soddisfa, e cioè se soddisfa (P) ogni modello $\xi(U)$.

LEMMA 2.10. - Se X è uno spazio misto, lo spazio anellato ad esso sottogiacente è uno spazio bianellato, oggetto di $Loc-2$.

TEOREMA 2.11. - Sia $X = (X, \mathcal{A}_X^{(k)})$ uno spazio misto. Se $k = \infty$ o se $1 \leq k < \infty$ ed X soddisfa la proprietà (P), l'applicazione:

$$\text{Hom}_{Em}(X, \mathbf{M}_k^{p,q}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}'_X)^p \times \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^q$$

definita ponendo

$$\varphi \mapsto (\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_{p+q}))$$

ove $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$, è una biiezione.

Per la dimostrazione di questo Teorema occorre premettere i seguenti due Lemmi:

LEMMA 2.12. — Sia $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)})$ dove U è un intorno aperto dell'origine O di $\mathbf{M}^{p,q}$. Esiste allora un intorno convesso $U_1 \subset U$ di O , tale che per ogni coppia di punti $u, v \in U_1$ si ha: $f(v) - f(u) = \sum_{i=1}^{p+q} (v_i - u_i) f_i(u, v)$, dove $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k-1)})$.

Dimostrazione. — Posto $F(\tau) = f(u + \tau(v - u))$ per τ reale variabile nell'intervallo $[0, 1]$, risulta $f(v) - f(u) = \int_0^1 F'(\tau) d\tau$. Per provare l'asserto basta quindi osservare che $f_i(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right)_{t=u+\tau(v-u)} d\tau$ è elemento di $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k-1)})$.

LEMMA 2.13. — Sia $(U, \mathcal{O}_U^{(k)}, \mathcal{O}'_U^{(k)})$ un sottospazio aperto di uno spazio $\mathbf{M}_k^{r,s}$ (cioè un modello di varietà mista di classe C^k) e $s_1, \dots, s_{p+q} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^{(k)})^p \times \Gamma(U, \mathcal{O}_U^{(k)})^q$. Esiste allora uno ed un solo morfismo

$$\varphi : (U, \mathcal{O}_U^{(k)}, \mathcal{O}'_U^{(k)}) \rightarrow (\mathbf{M}^{p,q}, \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)}, \mathcal{O}'_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)})$$

tale che sia $\varphi_0(x) = (s_1(x), \dots, s_{p+q}(x))$, per ogni $x \in U$.

Dimostrazione. — Se esiste φ questa è unica perché $(U, \mathcal{O}_U^{(k)}, \mathcal{O}'_U^{(k)})$ è uno spazio ridotto, quale modello di varietà.

Per provare l'esistenza di φ , si osservi che la sua componente topologica φ_0 è definita nell'enunciato del Lemma, la continuità seguendo dall'ipotesi che le sezioni s_i sono funzioni di classe C^k in U .

Per definire il morfismo di fasci $\varphi_1 : \mathcal{O}_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)} \rightarrow \varphi_{0*}(\mathcal{O}'_U^{(k)})$ si può seguire la traccia della dimostrazione nel caso analitico, ottenendosi un morfismo di spazi anellati. Si prova poi che tale morfismo è di fatto un morfismo di spazi bi-anellati perché induce un morfismo $\varphi'_1 : \mathcal{O}'_{\mathbf{M}^{p,q}}^{(k)} \rightarrow \varphi_{0*}(\mathcal{O}_U^{(k)})$ che rende commutativo il relativo diagramma.

Dimostrazione del Teorema 2.11. — Iniettività. Poiché il Teorema è di natura locale si può supporre che X sia un sottospazio chiuso di presentazione finita di un sottospazio aperto W di un $\mathbf{M}_k^{r,s}$. Siano $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbf{M}_k^{p,q}$ due morfismi tali che $\varphi_1(t_i) = \psi_1(t_i)$ per $i = 1, \dots, p+q$. Poiché per definizione (cfr. Definizione 1.3) φ e ψ si possono estendere localmente si può senz'altro supporre di avere il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & W \subset \mathbf{M}_k^{r,s} \\ \searrow \varphi & \downarrow \psi & \downarrow \psi' \\ & & \mathbf{M}_k^{p,q} \\ & \nearrow \varphi' & \end{array}$$

e che, se $a \in X$, sia $j_0(a) = O \in W \subset \mathbf{M}_k^{r,s}$. Come nel caso analitico si vede subito che $\varphi_0 = \psi_0$ e si può supporre che sia $\varphi_0(a) = \psi_0(a) = O$.

Indicata con $\mathfrak{I}_0$ la fibra in O dell'ideale $\mathfrak{I}$ che definisce X come sottospazio di W si ha il diagramma commutativo (ove la riga è esatta):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{I}_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{W,0}^{(k)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,a}^{(k)} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \psi_0^* & & \downarrow \psi_a^* \\
 & & \nearrow \varphi_0^* & & \mathcal{O}_{M_k^{p,q},0}^{(k)} & & \nearrow \varphi_a^*
 \end{array}$$

dal quale, tenuto conto delle ipotesi e del Lemma 2.12, segue l'asserto.

Surgettività. - Ci si riconduce alle fibre e si prova l'asserto tenendo conto del Lemma 2.13.

3. ESISTENZA DEI LIMITI PROIETTIVI FINITI IN Em

TEOREMA 3.1. - *Nella categoria Em esistono i limiti proiettivi finiti.*

Dimostrazione. - Indicato con $e = \{\emptyset\}$ l'insieme costituito da un solo elemento, $(e, \mathbf{C}, \mathbf{R})$ è oggetto finale di Em . Per provare il Teorema basta allora provare che esistono i prodotti diretti finiti e i nuclei dei doppi morfismi. Occorre il

LEMMA 3.2. - *Il prodotto diretto $\mathbf{M}_k^{p,q} \times \mathbf{M}_k^{r,s}$ esiste in Em ed è uguale a $\mathbf{M}_k^{p+r, q+s}$.*

Dimostrazione. - È conseguenza del Teorema 2.11.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. GROTHENDIECK e J. A. DIEUDONNÉ, *Elements de Géometrie Algébrique*. Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [2] M. JURCHESCU, *Espaces annelés transcendants et morphismes analytiques*. Sémin. Espaces Analytiques, Bucarest (1969).
- [3] M. JURCHESCU, *Espaces mixtes* (in corso di stampa).
- [4] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*. Masson, Paris (1968).
- [5] K. SPALLEK, *Differenzierbare Räume*. «Math. Ann.», 180 (1969).