

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

L. MONTEFUSCO, G. SCARPI, GIULIO SUPINO

**Un esempio di modello geologico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 51 (1971), n.3-4, p. 221-227.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1971\\_8\\_51\\_3-4\\_221\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_221_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Teoria dei modelli.** — *Un esempio di modello geologico.* Nota (\*)  
di L. MONTEFUSCO, G. SCARPI e GIULIO SUPINO, presentata dal  
Socio G. SUPINO,

SUMMARY. — An experimental work has been carried out on an « inverse » model of a geological phenomenon, on the basis of a theory recently suggested. Results agree with the accepted theory on the genesis of rock-salt domes, but discrepancies occur between the measured duration and the one estimated by geologists for the phenomenon.

1. — In due note del Dicembre 1964 e del Gennaio 1965, uno di noi <sup>(1)</sup> ha indicato le condizioni cui dovrebbero soddisfare eventuali modelli geologici. In particolare nella seconda nota era suggerita la opportunità di eseguire un « modello inverso » cioè un modello nel quale si assume come iniziale la situazione finale (che è conosciuta), si applicano ad essa in ogni punto sollecitazioni uguali ed opposte a quelle che si ritiene abbiano agito nel tempo e si controlla se la situazione finale corrisponda a quella che si ritiene esistesse all'inizio del dislocamento.

L'utilità del modello inverso (proposto allora — riteniamo — per la prima volta) risulta da due elementi fondamentali:

1) che è conosciuto lo stato finale mentre quello iniziale è soltanto supposto (e pertanto può risultare differente);

2) che non è detto che il moto, quale si è svolto nei secoli, sia un moto *stabile*; cioè non sappiamo se due configurazioni iniziali, tra loro vicine, diano luogo a configurazioni finali pure vicine. Potrebbe essere che piccole differenze nelle configurazioni iniziali dessero luogo a differenze sensibili nello stato finale. In questo caso, le differenze risulterebbero attenuate in uno studio eseguito col modello inverso.

Nella stessa nota era indicata la possibilità di studiare, con un modello inverso, la formazione di un duomo salino in uno strato di calcare. La presente nota riferisce su le esperienze che successivamente sono state effettivamente eseguite e sui risultati ottenuti.

2. — Nella nota già ricordata, al n. 13, si era preso in esame (riprendendolo dal Naday: *Theory of flow and Fracture of Solids* — Mc Graw Hill 1963) il duomo salino di Barbers Hill che secondo i calcoli dei geologi si sarebbe formato in 24 milioni di anni. La formazione del duomo sarebbe dovuta alla differenza di densità tra salgemma e calcare soprastante. Se questo ha una cavità in basso

(\*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1971.

(1) G. SUPINO, *Sopra la possibilità di modelli geologici*, « Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali », Dicembre 1964 (pp. 349-353) e Gennaio 1965 (pp. 18-24).

ed essa è occupata dal salgemma, la maggiore densità (e quindi il maggior peso specifico) del calcare laterale provoca una spinta sul salgemma, spinta che in corrispondenza della cavità è minore che nella zona circostante: con ciò il salgemma che occupa la cavità viene spinto verso l'alto formando lentamente il duomo.

Si tratta di controllare questa teoria (nel senso di verificare se è meccanicamente ammissibile) e di stabilire se il fenomeno può essersi svolto in 24 milioni di anni.

Ritornando al duomo di Barbers Hill osserviamo che la base di esso ha circa 2500 m di diametro. Adottando una scala delle lunghezze  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  allora la base del duomo con una parte del contorno calcareo dava luogo ad un modello con diametro di 60 cm (10 cm per il duomo ed il resto per il rivestimento calcareo).

La scala dei tempi è stata ridotta nella proporzione  $\tau = 4,76 \cdot 10^{-12}$  portando così ad un'ora il tempo di 24 milioni di anni. Segue:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} 19,04 \cdot 10^{-17}$$

(indicando con  $\eta_2, \gamma_2$  viscosità dinamica e peso specifico nel modello e con  $\eta_1, \gamma_1$  le grandezze corrispondenti nel prototipo).

In base a queste scale, tenendo presente che il peso specifico del salgemma è di 2,1 gr/cm<sup>3</sup> e che la sua viscosità a 18° è di circa  $2 \cdot 10^{18}$  poise, mentre il peso specifico del calcare è 2,6 gr/cm<sup>3</sup> e la sua viscosità è  $10^{21}$  poise, si osservò subito come i materiali che nel modello avrebbero dovuto rappresentare calcare e salgemma, dovevano soddisfare alle seguenti condizioni fisiche:

- calcare del modello : peso specifico 1,30 gr/cm<sup>3</sup> viscosità  $9,5 \cdot 10^4$  poise;
- salgemma del modello: peso specifico 1,05 gr/cm<sup>3</sup> viscosità 190 poise.

Dopo una ricerca, abbastanza laboriosa, di materiali che avessero queste caratteristiche, si è giunti alla scelta seguente:

- *per il materiale rappresentativo del calcare*: una sospensione di caolino in catrame al 30 % in peso, sospensione che risulta molto stabile e che alla temperatura di 34,6° C presenta le caratteristiche desiderate;
- *per il materiale rappresentativo del salgemma*: una soluzione al 7,3 % in peso di carbossimetilcellulosa in acqua <sup>(2)</sup>, che pure alla stessa temperatura di 34,6° C presenta le caratteristiche desiderate.

Si è avuto cura di scegliere materiali che non avessero, per quanto riguarda la viscosità, un comportamento del tipo di «Corpo di Bingham» (cioè che non esistesse un valore soglia della velocità di scorrimento fino al quale il corpo

(2) La «carbossimetilcellulosa» è l'etere della cellulosa con l'acido glicolico:  $C_6H_7O_2(OH)_2OCH_2COOH$ . La formula è indicativa perché in pratica, a seconda delle condizioni di preparazione, si hanno prodotti con differenti valori del rapporto tra i gruppi - OH liberi ed eterificati. La carbossimetilcellulosa da noi utilizzata era un prodotto Montecatini.

si comporta come rigido), ma non si è potuto evitare che i fluidi scelti fossero di tipo non-newtoniano. Tuttavia il loro comportamento per i bassi valori della velocità di scorrimento che intervengono nelle prove oggetto della nostra ricerca, è ancora sensibilmente newtoniano (e l'approssimazione che si ottiene con essi è ancora ottima).

Poiché nè l'uno nè l'altro fluido sono trasparenti, è stato necessario complicare alquanto l'apparato sperimentale, effettuando un modello completo a simmetria cilindrica nel quale i rilevamenti venivano effettuati con una piccola sonda, ed un semi-modello, chiuso da una parete trasparente, che consentiva riprese fotografiche.

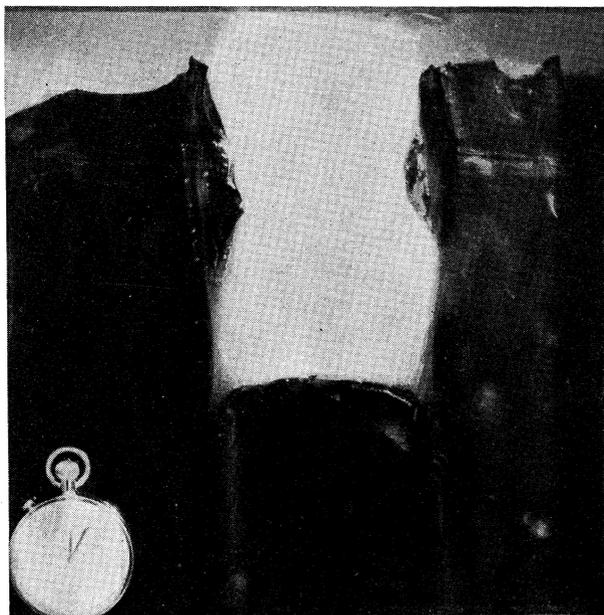


Fig. 1. - Il modello dopo 5'' dall'inizio della prova.

In ogni caso, data la necessità di mantenere la temperatura al valore fissato, si è usata una camicia esterna termostatica, con acqua in movimento, che veniva mantenuta alla temperatura desiderata con la precisione di  $0,2^{\circ}\text{C}$ .

Il modello, nella sua versione completa, era costruito da un recipiente cilindrico di diametro di 60 cm, che veniva riempito fino all'altezza di circa 45 cm dalla sospensione di caolino in catrame.

Durante il lungo periodo di tempo ( $\sim 6$  giorni) necessario perché fosse raggiunto il regime termico si effettuava un foro cilindrico concentrico col recipiente di circa 10 cm di diametro e 15 di profondità, e la forma di questo veniva mantenuta da un'apposita sagoma in plexiglas.

Si è quindi posto il problema di una buona lubrificazione delle pareti di plexiglas, che consentisse la rapida estrazione della forma in modo che fosse possibile versare nel foro la soluzione di carbossimetilcellulosa, preven-

tivamente portata alla temperatura opportuna, prima che insorgessero sensibili deformazioni nel foro stesso. Si è trovato che un lubrificante eccellente è proprio la soluzione di carbossimetilcellulosa impiegata, e questa stessa è stata utilizzata anche per lubrificare le pareti del recipiente e ridurre così l'effetto della eccessiva vicinanza delle pareti stesse.

Si sono effettuate sul modello intero quattro prove, di cui due con la tecnica descritta e due con una leggera modificazione del sistema di introduzione della soluzione di carbossimetilcellulosa. In queste la sagoma per la formazione del foro era costituita da un cilindro cavo di plexiglas, chiuso al fondo da una leggera membrana. Si poteva in tal modo riempire il foro con la soluzione



Fig. 2. - Il modello dopo 27' 10''.

e, una volta raggiunto il regime termico, sfilare la sagoma dopo avere inciso con un sottile trincetto la membrana al fondo su quasi tutto il perimetro.

Il fenomeno esaminato, trattandosi di un modello inverso, consisteva nella sparizione del cono cilindrico nella massa di catrame e nel ritorno alla situazione di fluidi stratificati separati da una superficie orizzontale. Si è cioè partiti dalla rappresentazione della situazione presente, per arrivare, nel modello, alla rappresentazione della situazione supposta iniziale, come proposto nella nota citata e come si è osservato in 1).

Nelle prove effettuate sul modello nella sua versione completa non si sono riscontrate sensibili differenze di comportamento da prova a prova, e si è quindi potuto ritenere il modello del tutto ripetibile.

Le misure effettuate sono state: il rilievo della profondità e, per quanto possibile, della forma del foro, ed i corrispondenti valori del tempo, assunto

come istante iniziale l'istante in cui il modello ha cominciato a deformarsi liberamente.

Per seguire più agevolmente l'evolversi del fenomeno sul modello si è anche costruito, come si è detto, un recipiente semicilindrico chiuso anteriormente da una parete di plexiglas, in cui si è costruito un semi-modello, sfruttando la simmetria cilindrica esistente.

La quasi perfetta lubrificazione delle pareti, ed in particolare di quella anteriore di plexiglas, ha consentito che il comportamento di questo « modello dimezzato » si avvicinasse tanto a quello del modello intero, da poter trascurare le differenze fra l'uno e l'altro.

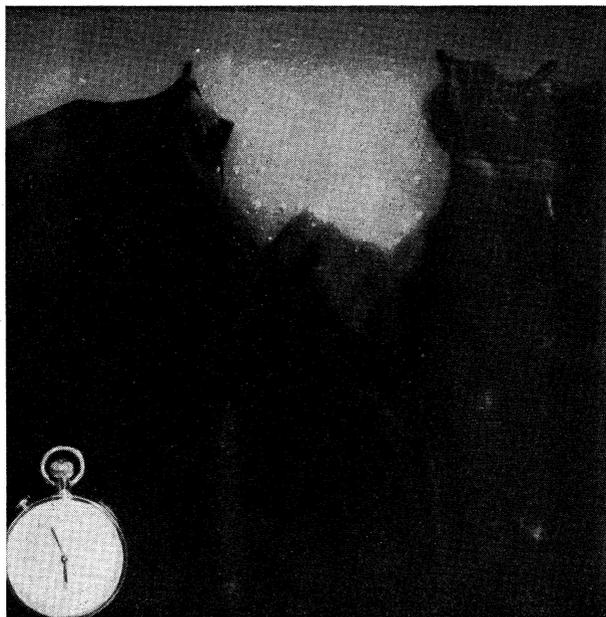


Fig. 3. - Il modello dopo 88' 56''.

In pratica infatti il legame fra tempi di svolgimento e profondità è rimasto lo stesso che nel caso di modello intero, e solo si è rilevata una leggera differenza nella forma via via assunta dal foro, che nella versione del modello intero appariva leggermente più conica.

Anche in questo caso si sono eseguite, oltre alle numerose prove preparatorie, quattro prove definitive, anch'esse realizzate, due con la tecnica del repentino versamento della soluzione di carbossimetilcellulosa nel foro predisposto, e due con quella consistente nello sfilare la parete rigida di separazione, essendo i due materiali già in posto.

Anche in questo caso i risultati sono stati pienamente concordanti fra una prova e l'altra, e i rilevamenti sono stati fatti per via fotografica, sia della forma del foro sia del tempo, avendo contemporaneamente fotografato un cronometro fatto scattare all'avvio del fenomeno (figg. 1-4).

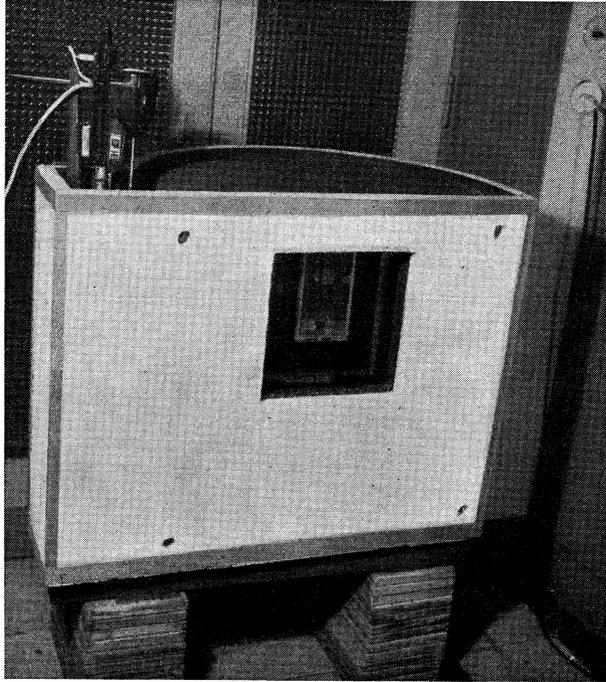


Fig. 4. - Il modello dimezzato.

I risultati delle 4 esperienze condotte sul modello intero e delle 4 condotte su modello «dimezzato» sono raccolti nella curva della fig. 5. Da essa risulta che la durata del fenomeno dipende dalle condizioni iniziali.

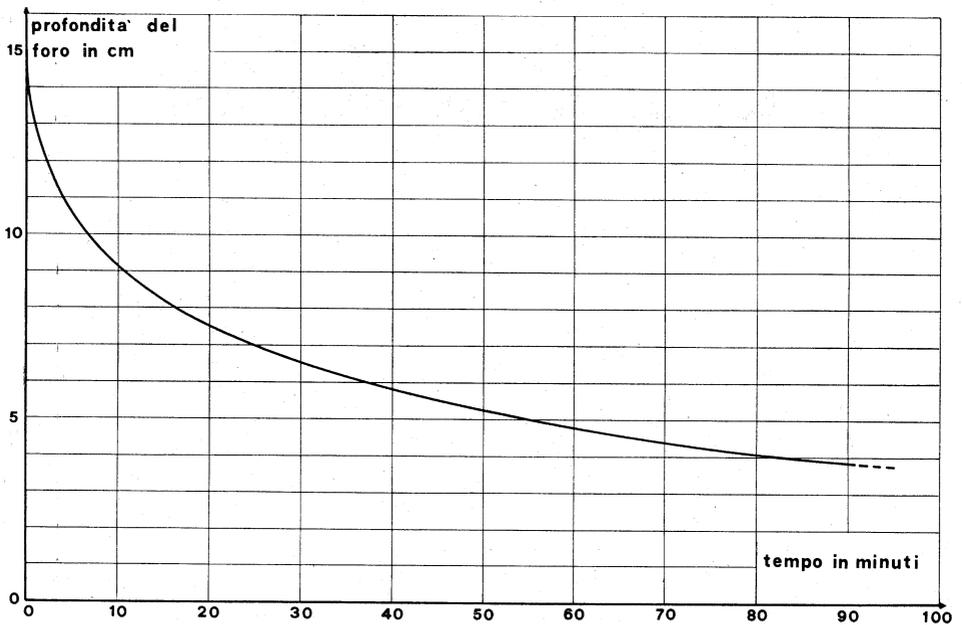


Fig. 5.

Se il duomo attuale si è costituito in 24 milioni di anni (e se il modello rappresenta correttamente il fenomeno) allora la cavità iniziale già occupata dal salgemma all'inizio del tempo aveva l'altezza (di 4,8 cm nel modello e cioè) di 1200 m nel prototipo (su un'altezza totale di 3750 m).

Il dubbio che potrebbe essere sollevato a proposito di questi numeri è che le condizioni di temperatura e di pressione possano essere variate nel tempo, dando luogo a viscosità diverse da quelle assunte nel nostro esempio.

Ma, supposto che il trasferimento al modello sia esatto, noi potremo affermare:

- 1) che la teoria della genesi dei duomi salini è meccanicamente corretta;
- 2) che per ottenere lo sviluppo del duomo occorre una cavità iniziale e che tale cavità doveva avere l'altezza di 1200 m se il fenomeno si è svolto in 24 milioni di anni, mentre sarebbe stata sufficiente l'altezza di 950 m se il fenomeno si fosse svolto in 36 milioni di anni.

Naturalmente col modello inverso si potrebbe raggiungere anche (in un tempo infinitamente lungo) l'altezza zero della cavità iniziale, altezza che manifestamente non può generare il duomo.

Per valutare quale è l'altezza minima della cavità iniziale atta a provocare la formazione di un duomo occorrerebbe eseguire l'esperienza con un modello diretto. Il modello inverso può dare soltanto il valore dell'altezza minima necessaria per formare il duomo in un *tempo fissato*. Ciò si è effettivamente ottenuto se la viscosità del calcare e del salgemma è rimasta nel tempo uguale (in media) a quella da noi supposta.