Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo Dicuonzo

Sulla rappresentazione del piano iperbolico edel piano di De Sitter su una retta reale proiettiva

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 186–190.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_186_0>

Geometria. — *Sulla rappresentazione del piano iperbolico e del piano di De Sitter su una retta reale proiettiva* (*). Nota (**) di

VINCENZO DICUONZO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. – The purpose of this paper is the representation of the hyperbolic plane and the De Sitter plane on a projective real line by involutions and their transformations.

Oggetto di questa nota è la costruzione di modelli, sia del piano iperbolico che del piano di De Sitter, su una retta reale proiettiva r mediante involuzioni.

Un *primo modello*, su r, *del piano iperbolico*, si costruisce assumendo come rette del modello, o *pseudorette*, *le involuzioni iperboliche su* r e come punti del modello, o *pseudopunti*, *le involuzioni ellittiche su* r. La relazione di *appartenenza tra pseudopunti e pseudorette* viene definita come *permutabilità tra involuzioni di tipo diverso* (due involuzioni sono permutabili, se una almeno è iperbolica e ha i punti uniti corrispondenti nell'altra).

Per due pseudopunti distinti passa una pseudoretta ben determinata. Infatti, date due involuzioni ellittiche $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ su r, esiste una involuzione iperbolica $\mathfrak{I}_3$, i cui punti uniti si corrispondono sia in $\mathfrak{I}_1$ che in $\mathfrak{I}_2$.

Per l'incidenza di due pseudorette si presentano tre casi. Due involuzioni iperboliche, $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$, su r, infatti, possono avere le coppie di punti uniti che si separano o no, oppure $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ hanno un punto unito in comune; nel primo caso esiste una involuzione ellittica $\mathfrak{I}_3$ in cui si corrispondono i punti uniti di $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$, nel secondo caso esiste una involuzione iperbolica $\mathfrak{I}_4$ avente la stessa proprietà, nel terzo caso non esiste alcuna involuzione avente la stessa proprietà. In corrispondenza due pseudorette vengono dette *incidenti*, *disgiunte o parallele*. *Due pseudorette* quindi *si dicono parallele, se le involuzioni corrispondenti hanno un punto unito in comune.*

Rispetto ad una pseudoretta a, per uno pseudopunto $P \notin a$, *si possono condurre due pseudorette distinte parallele ad a.* Se $P \notin a$, i punti uniti U e V dell'involuzione a non si corrispondono nell'involuzione P; esistono quindi due punti $\overline{U}$ e $\overline{V}$ corrispondenti rispettivamente di U e V nell'involuzione P. Le involuzioni iperboliche, aventi per punti uniti U e $\overline{U}$ o V e $\overline{V}$, sono le pseudorette richieste.

La *perpendicolarità tra pseudorette* viene definita come *permutabilità tra involuzioni iperboliche.* Si vede subito che *due pseudorette perpendicolari sono incidenti* e inoltre *due pseudorette disgiunte sono perpendicolari ad una stessa pseudoretta.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni (sez. n. 4) del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1971.

Per uno pseudopunto P *si può condurre una ben determinata pseudoretta* b, *perpendicolare ad una data pseudoretta* a. Infatti le due involuzioni P e a, essendo P ellittica, hanno in comune una coppia di punti reali e distinti, che sono punti uniti di una involuzione iperbolica b.

Poiché due involuzioni iperboliche permutabili non hanno in comune una coppia di punti reali, nel piano iperbolico *non esistono triangoli triret-tangoli.*

Indicato con $\overline{G}$ il *gruppo delle proiettività su* r, se a è una involuzione iperbolica di $\overline{G}$, con il simbolo σ_a si rappresenta l'*automorfismo interno di* $\overline{G}$ *associato ad* a. Poiché il prodotto di tre involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio $\mathcal{F}$ è una involuzione di $\mathcal{F}$, mediante σ_a involuzioni si trasformano in involuzioni dello stesso tipo e in particolare restano unite quelle permutabili con a; cioè mediante σ_a, pseudorette si mutano in pseudorette, pseudopunti in pseudopunti e restano uniti sia gli pseudopunti di a, sia le pseudorette perpendicolari ad a. L'*automorfismo interno* σ_a viene chiamato *pseudosimmetria assiale.*

Se P è una involuzione ellittica, per σ_P cioè per l'*automorfismo interno di* $\overline{G}$ *associato a* P, resta unita ogni involuzione iperbolica permutabile con P, cioè ogni pseudoretta passante per P; σ_P viene chiamato *pseudosimmetria centrale.*

Poiché ogni involuzione ellittica P può essere ottenuta come prodotto di due involuzioni iperboliche a e b, permutabili tra loro e con P, si ha che *ogni pseudosimmetria centrale* σ_P *è uguale al prodotto di due pseudosimmetrie* σ_a *e* σ_b, *con* $a \perp b$ *e* $P \in a, b$.

Dicesi *pseudomovimento ogni prodotto di pseudosimmetrie assiali e quindi ogni automorfismo interno di* $\overline{G}$, dato che $\overline{G}$ è generato dalle involuzioni iperboliche su r.

Ogni elemento di $\overline{G}$ può essere rappresentato come prodotto di due involuzioni, una delle quali almeno è iperbolica, e quindi come prodotto di, al massimo, tre involuzioni iperboliche; in corrispondenza *ogni pseudomovimento si ottiene come prodotto di due pseudosimmetrie, una delle quali almeno è assiale, e quindi come prodotto di, al massimo, tre pseudosimmetrie assiali.*

Poiché il prodotto di tre involuzioni, appartenenti ad uno stesso fascio $\mathcal{F}$, è una involuzione di $\mathcal{F}$, si ha il cosiddetto *teorema delle tre simmetrie*: *se* a, b, c *sono tre pseudorette appartenenti ad un fascio* $\mathcal{F}$, $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$, *con* $d \in \mathcal{F}$, *e quindi* $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$.

Gli *pseudomovimenti* vengono suddivisi in *pari e dispari*, secondo che siano prodotti di un numero pari o dispari di pseudosimmetrie assiali. *Gli pseudomovimenti pari formano un gruppo* G^+, *sottogruppo normale del gruppo* G *degli pseudomovimenti*: infatti G^+ è sottogruppo di G di indice 2.

G^+ *è generato dalle pseudosimmetrie centrali*, poiché le proiettività dirette su r si ottengono come prodotti di involuzioni ellittiche.

Secondo che a *e* b *siano incidenti, disgiunte o parallele*, un elemento $\sigma_a \sigma_b \in G^+$ viene chiamato rispettivamente *rotazione*, *traslazione iperbolica* o *spostamento oriciclico*; nel primo caso c'è uno pseudopunto unito $P \in a, b$, nel secondo una pseudoretta unita $c \perp a, b$, nel terzo non ci sono né pseudorette unite né pseudopunti uniti.

Le rotazioni intorno ad uno stesso pseudopunto, le traslazioni lungo una stessa pseudoretta e gli spostamenti oriciclici relativi ad uno stesso fascio formano dei gruppi abeliani. Per questo basta dimostrare la commutatività del prodotto, la quale è una diretta conseguenza del teorema delle tre simmetrie. Infatti: $(\sigma_a \sigma_b)(\sigma_c \sigma_d) = (\sigma_a \sigma_b \sigma_c)\sigma_d = (\sigma_c \sigma_b \sigma_a)\sigma_d = \sigma_c(\sigma_b \sigma_a \sigma_d) = \sigma_c(\sigma_d \sigma_a \sigma_b) = (\sigma_c \sigma_d)(\sigma_a \sigma_b)$.

Un *secondo modello del piano iperbolico* viene costruito su r lasciando inalterata la definizione di pseudoretta e assumendo come *pseudopunti i fasci di involuzioni permutabili con una involuzione ellittica*. Ognuno di tali fasci è individuato da due involuzioni iperboliche, tali che si separino le coppie di punti uniti.

L'appartenenza di uno pseudopunto ad una pseudoretta significa appartenenza di tre involuzioni iperboliche ad uno stesso fascio, cioè che il loro prodotto è una involuzione dello stesso fascio.

La verifica che per due pseudopunti distinti passi una pseudoretta ben determinata è la seguente. Come modello della retta proiettiva reale r si prenda una conica non degenere $\mathfrak{C}$ a punti reali. Se P e Q sono due pseudopunti, ad essi sono associati due fasci di involuzioni iperboliche, i cui assi formano due fasci di rette aventi i punti base $\overline{\mathrm{P}}$ e $\overline{\mathrm{Q}}$ interni a $\mathfrak{C}$. La retta $\overline{\mathrm{P}}\overline{\mathrm{Q}}$ è asse di una involuzione iperbolica, la quale è la pseudoretta per P e Q.

Poiché ad ogni pseudopunto di questo modello è associata una involuzione ellittica, l'ulteriore sviluppo della costruzione del modello si ottiene allo stesso modo di quello precedente; se ne tralascia perciò lo studio.

Passiamo ora al *modello su r del piano di De Sitter.*

Come pseudorette si assumono le *involuzioni su r, sia ellittiche che iperboliche*, le quali vengono chiamate rispettivamente *pseudorette spaziali o temporali*.

Come *pseudopunti* si assumono invece i *fasci di involuzioni, sia iperboliche che ellittiche, permutabili con una stessa involuzione iperbolica.* Ognuno di tali fasci è individuato da due involuzioni: se una di queste è ellittica, non occorre alcuna condizione aggiuntiva; se invece sono entrambe iperboliche, occorre che non si separino le coppie di elementi uniti. *L'appartenenza di uno pseudopunto ad una pseudoretta* significa quindi *appartenenza di tre involuzioni ad uno stesso fascio*, cioè che il loro prodotto è una involuzione dello stesso fascio.

Per l'incidenza di due pseudorette si presentano tre casi: secondo che le due involuzioni corrispondenti siano permutabili con una involuzione iperbolica o ellittica, oppure abbiano un punto unito in comune, le pseudorette si dicono *incidenti*, *disgiunte o parallele.*

La relazione di *perpendicolarità tra pseudorette* viene definita come *permutabilità tra involuzioni su r.*

Poiché due involuzioni iperboliche permutabili tra loro sono entrambe permutabili con una involuzione ellittica, si ha che *esistono dei trilateri trirettangoli*: in ciascuno di questi un lato appartiene ad una pseudoretta spaziale e gli altri due appartengono a pseudorette temporali disgiunte, perciò *in un trilatero trirettangolo esistono due soli vertici* appartenenti alla pseudoretta spaziale.

Se come modello di r si assume una conica non degenere $\mathcal{C}$ a punti reali, si vede facilmente che le pseudorette perpendicolari ad una pseudoretta spaziale sono soltanto temporali, tutte disgiunte e appartenenti ad uno stesso fascio; invece le pseudorette perpendicolari ad una pseudoretta temporale sono di due tipi, passano per uno pseudopunto e appartengono quindi ad uno stesso fascio. In questo modo *ad ogni pseudoretta temporale o spaziale a viene associato un fascio di pseudorette perpendicolari ad a*, il quale viene detto *polo di a* ed è pseudopunto se a è temporale: ogni pseudoretta spaziale o temporale a non appartiene al proprio polo e passa per i poli delle pseudorette perpendicolari ad essa.

Per il modello così costruito, dati due pseudopunti distinti, può mancare la pseudoretta passante per essi: infatti due pseudopunti, poli di due pseudorette temporali parallele, non appartengono né ad una pseudoretta temporale né ad una spaziale. Per ottenere la struttura d'incidenza del piano di De Sitter bisogna introdurre delle nuove pseudorette, le quali vengono chiamate « di luce » e sono indicate con il simbolo $[a]$.

Una *pseudoretta di luce* viene definita come *luogo degli pseudopunti, poli di pseudorette temporali parallele. Con questa definizione due pseudopunti distinti individuano sempre una pseudoretta passante per essi.*

Una pseudoretta di luce $[a]$ e un'altra b di tipo diverso si dicono incidenti, se b appartiene ad uno pseudopunto di $[a]$; una pseudoretta di luce $[a]$ e una altra temporale b si dicono parallele, se il polo di b appartiene ad $[a]$. Due pseudorette di luce si dicono incidenti, se hanno uno pseudopunto in comune.

Ricorrendo al modello di r sulla conica $\mathcal{C}$, si vede subito che ad ogni pseudoretta viene associata una retta, la quale è secante, esterna o tangente a $\mathcal{C}$, secondo che la pseudoretta data sia rispettivamente temporale, spaziale o di luce. L'incidenza tra pseudorette significa intersezione delle rette, ad esse associate, in un punto esterno a $\mathcal{C}$; il parallelismo tra pseudorette significa intersezione su $\mathcal{C}$ delle rette associate. Si ha dunque che sono incidenti due pseudorette distinte, se una di esse è spaziale, oppure se sono entrambe di luce; una pseudoretta temporale e una di luce sono o incidenti o parallele; due pseudorette temporali infine possono essere incidenti, o parallele, oppure disgiunte. Si vede inoltre che, data una pseudoretta temporale a, per uno pseudopunto $P \notin a$ si possono condurre due pseudorette parallele ad a; e infine, data una pseudoretta di luce $[a]$, per ogni pseudopunto $P \notin [a]$, esiste una pseudoretta temporale parallela ad $[a]$.

Come nel caso del piano iperbolico, indicato con $\overline{G}$ *il gruppo delle proiettività su r, se a è una involuzione di $\overline{G}$*, con il simbolo σ_a rappresentiamo l'*automorfismo interno di $\overline{G}$ associato ad a*. Ripetendo il ragionamento fatto per il piano iperbolico, si ha che, mediante σ_a, pseudorette temporali o spaziali si mutano in pseudorette dello stesso tipo, restano unite, oltre a, le pseudorette perpendicolari ad a e si conservano inoltre la perpendicolarità e l'appartenenza; perciò pseudopunti si mutano in pseudopunti e in particolare restano uniti gli pseudopunti di a e il polo di a.

L'*automorfismo interno* σ_a viene chiamato *pseudosimmetria spaziale o temporale secondo che lo sia a.*

Poichè una involuzione ellittica può essere ottenuta come prodotto di due involuzioni iperboliche permutabili, *ogni pseudosimmetria spaziale si può esprimere come prodotto di due pseudosimmetrie temporali con assi perpendicolari.*

Essendo involutivi gli automorfismi interni di $\overline{G}$ associati ad involuzioni, si ha che l'*identità e le pseudosimmetrie rispetto ad assi formanti un trilatero trirettangolo costituiscono un gruppo quadrinomio rispetto al prodotto operatorio.*

Dicesi *pseudomovimento ogni prodotto di pseudosimmetrie assiali, cioè ogni automorfismo interno di* $\overline{G}$.

Con ragionamento analogo a quello seguito per il piano iperbolico si dimostra che *ogni pseudomovimento si ottiene come prodotto di due pseudosimmetrie, una delle quali è temporale, e quindi come prodotto di, al massimo, tre pseudosimmetrie temporali.*

Quest'ultimo risultato porta alla divisione degli *pseudomovimenti* in *pari e dispari*: *quelli pari formano un gruppo* G^+ che è sottogruppo normale del gruppo G degli pseudomovimenti. G^+ *è generato dalle pseudosimmetrie spaziali*, poiché le proiettività dirette su r si ottengono come prodotti di involuzioni ellittiche.

Secondo che a e b siano pseudorette incidenti, disgiunte, o parallele, l'elemento $\sigma_a \sigma_b \in G^+$ viene chiamato rispettivamente *rotazione*, *traslazione spaziale*, *o spostamento oriciclico*; nel primo caso sono uniti uno pseudopunto e una pseudoretta temporale, nel secondo una pseudoretta spaziale, nel terzo non ci sono né pseudorette unite né pseudopunti uniti.

Le rotazioni intorno ad uno stesso pseudopunto, le traslazioni lungo una stessa pseudoretta spaziale, e gli spostamenti oriciclici relativi ad uno stesso fascio formano dei gruppi abeliani.

Come nel caso del piano iperbolico si tratta di una conseguenza immediata del *teorema delle tre simmetrie* il cui enunciato, per il piano di De Sitter, è il seguente:

Se a, b, c *sono tre pseudorette appartenenti ad uno stesso fascio* $\mathcal{F}$, $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$, *dove* $d \in \mathcal{F}$ *e inoltre d è temporale o spaziale, secondo che sia dispari o pari il numero delle pseudorette temporali della terna* a, b, c.

Quest'ultimo teorema, come sappiamo, si dimostra mediante la proprietà riguardante il prodotto di tre involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio.