Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Anna Zaretti

Soluzioni periodiche di un problema misto non lineare per le equazioni di Navier-Stokes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 154–161.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_154_0>

Analisi matematica. — *Soluzioni periodiche di un problema misto non lineare per le equazioni di Navier-Stokes* (*). Nota (**) di ANNA ZARETTI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — A Theorem is given for the existence of at least one periodic solution of a non-linear mixed problem for the Navier-Stokes system. The proof is given for the bidimensional case and when the wall of the tube is not too permeable.

1. – In questa Nota ci proponiamo di studiare le soluzioni periodiche di un problema al contorno non lineare per le equazioni di Navier-Stokes, e di dimostrare un teorema di esistenza di almeno una soluzione periodica. Il problema preso in considerazione si può presentare nello studio del moto piano di un fluido viscoso incomprimibile in un « tubo » a pareti permeabili.

Sia precisamente Ω un insieme aperto limitato del piano (x_1, x_2) e sia Γ la sua frontiera, che supporremo dotata della proprietà di cono, e che definiremo nel modo seguente:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

dove:

$$\Gamma_1 = \{ x_1 = 0 \; ; \; 0 < x_2 < k \}$$

$$\Gamma_2 = \{ x_1 = l \; ; \; 0 < x_2 < k \}$$

rappresentano la sezione iniziale e finale del « tubo », e Γ_3 è la superficie laterale.

Come è noto la velocità $\vec{u}(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ $(x = \{x_1, x_2\})$ e la pressione $p(x, t)$ di un fluido viscoso incomprimibile, di densità unitaria e coefficiente di viscosità μ, che si muove in Ω soggetto ad una forza $\vec{f}(x, t) = \{f_1(x, t), f_2(x, t)\}$, soddisfano al sistema di Navier-Stokes:

$$(1,1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} - \mu \Delta u_j + \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} u_k + \dfrac{\partial p}{\partial x_j} = f_j & (j = 1, 2) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 . \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1971.

Supponiamo che la velocità $\vec{u}(x, t)$ del fluido soddisfi le seguenti condizioni al contorno:

$$(2,1) \qquad \frac{1}{2}|\vec{u}(x,t)|^2 + p(x,t) = \alpha_i(x,t) \qquad (x \in \Gamma_i \,,\ 0 \leq t \leq T \,,\ i = 1, 2)$$

$$(3,1) \qquad p(x,t) = \beta(x,t)\, \vec{u}(x,t) \times \vec{\nu}\, |\vec{u}(x,t) \times \vec{\nu}| \qquad (x \in \Gamma_3 \,,\ 0 \leq t \leq T)$$

$$(4,1) \qquad |\vec{u}(x,t)| = |\vec{u}(x,t) \times \vec{\nu}|$$

dove $\alpha_i(x, t)$ sono funzioni assegnate, $\beta(x, t) \geq 0$ è il coefficiente di permeabilità, e con $\vec{\nu}$ si è indicata la normale a Γ diretta verso l'esterno. Osserviamo che la (2,1) assegna il valore dell'energia totale del fluido sulle sezioni iniziale e finale di Ω; la (3,1) esprime la relazione, dedotta sperimentalmente, tra la pressione e la velocità del fluido e precisamente traduce la condizione che la velocità del fluido che attraversa la superficie laterale permeabile Γ_3, sia proporzionale alla radice quadrata del salto di pressione (si è supposta nulla la pressione esterna). Infine la (4,1) impone alla velocità di avere componente tangente a Γ nulla.

Prima di dare la definizione di soluzione periodica delle (1,1) soddisfacente alle condizioni poste, è necessario ricordare qualche definizione. (Cfr. [1]).

Indichiamo con $\mathfrak{N}$ l'insieme dei vettori piani $\vec{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ indefinitamente differenziabili in Ω, con divergenza nulla e tali che:

$$|\vec{u}(x)| = |\vec{u}(x) \times \vec{\nu}| \qquad \text{per} \quad x \in \Gamma.$$

Siano inoltre N^0 e N^1 la chiusura di $\mathfrak{N}$ rispettivamente in $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. Possiamo porre:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{N^0} = (\vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)}$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{N^1} = (\vec{u}, \vec{v})_{H^1_0(\Omega)}$$

risultando così N^0 ed N^1 spazi di Hilbert con N^1 denso in N^0 ed essendo l'immersione di N^1 in N^0 completamente continua.

Indichiamo ora con $D(A)$ l'insieme di elementi $\vec{u} \in N^1$ tali che: $\vec{v} \to (\vec{u}, \vec{v})_{N^1}$ sia una forma lineare continua nella topologia di N^0.

Come è noto, è allora possibile trovare un operatore A lineare autoaggiunto e positivo da $D(A)$ in N^0 tale che:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{N^1} = (A\vec{u}, \vec{v})_{N^0} \qquad \forall \vec{u} \in D(A) \,,\ \vec{v} \in N^1.$$

È allora possibile definire gli operatori A^σ ($\sigma \geq 0$) e indicare con:

$$V_\sigma = D(A^{\sigma/2})$$

il dominio di $A^{\sigma/2}$. V_σ risulta essere uno spazio di Hilbert con prodotto scalare così definito:

$$(\vec{u}\,,\vec{v})_{V_\sigma} = (A^{\sigma/2}\vec{u}\,, A^{\sigma/2}\vec{v})_{N^0}\,.$$

Risulta in particolare:

$$V_1 = N^1 \quad ; \quad V_0 = N^0 \quad ; \quad V_\sigma \subseteq H^\sigma(\Omega) \qquad 0 \leq \sigma \leq 1$$

e vale il teorema di interpolazione:

$$[V_\alpha\,, V_\beta]_\theta = V_{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}$$

che definisce uno spazio di Hilbert intermedio tra V_α e V_β. Identificando V_0 con il suo duale V'_0 si può inoltre porre:

$$V'_\sigma = V_{-\sigma}\,.$$

Possiamo ora dare la definizione di *soluzione periodica*.

Posto:

$$\vec{u}(t) = \{\vec{u}(x\,,t)\ ;\ x \in \Omega\}$$

$$\vec{f}(t) = \{\vec{f}(x\,,t)\ ;\ x \in \Omega\}$$

$$\alpha_i(t) = \{\alpha_i(x\,,t)\ ;\ x \in \Gamma_i\,;\quad i = 1, 2\}$$

$$\beta(t) = \{\beta(x\,,t)\ ;\ x \in \Gamma_3\}$$

$$b(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{2} u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\,\omega_k\,d\Omega$$

ed ammesso che $\vec{f}(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta(t)$ *siano periodiche di periodo* T, *diremo che* $\vec{u}(t)$ *è una soluzione periodica di periodo* T *delle* (1,1) *soddisfacente le condizioni al contorno* (2,1), (3,1), (4,1), *se*:

$$i)\qquad \vec{u}(t) \in L^\infty(0\,,T\,;V_0) \cap L^2(0\,,T\,;V_1)$$

e soddisfa l'equazione:

$$\begin{aligned}
&ii)\quad \int_0^T \Big\{(-\vec{u}(t)\,,\vec{h}'(t))_{V_0} + \mu\,(\vec{u}(t)\,,\vec{h}(t))_{V_1} + b(\vec{u}(t)\,,\vec{u}(t)\,,\vec{h}(t)) - \\
(5,1)\quad &\qquad - (\vec{f}(t)\,,\vec{h}(t))_{V_0}\Big\}\,dt = \\
&= \int_0^T - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \Big(\alpha_i(x\,,t) - \frac{1}{2}\,|\vec{u}(x\,,t)\times\vec{\nu}\,|^2\Big)\,\vec{h}(x\,,t)\times\vec{\nu}\,d\Gamma_i\,dt - \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_3} \beta(x\,,t)\,|\vec{u}(x\,,t)\times\vec{\nu}\,|\,(\vec{u}(x\,,t)\times\vec{\nu})\,\vec{h}(x\,,t)\times\vec{\nu}\,d\Gamma_3\,dt
\end{aligned}$$

$$\forall \vec{h}(t) \in C^0(0\,,T\,;V_1)\,,\quad \vec{h}'(t) \in L^1(0\,,T\,;V_0)\,,\quad \vec{h}(0) = \vec{h}(T)\,.$$

Osserviamo che la condizione: $\vec{u}(0) = \vec{u}(T)$, necessaria e sufficiente per la periodicità della $\vec{u}(t)$, è contenuta implicitamente nella (5,1). Ricordiamo ora che in [2] si è dimostrata l'esistenza in grande di una ed una sola soluzione del sistema (1,1), soddisfacente le condizioni (2,1), (3,1), (4,1) e la condizione iniziale: $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ e supponendo in particolare che la parete del « tubo » Ω non sia troppo permeabile, ossia che il coefficiente di permeabilità non sia troppo piccolo. Precisamente il Teorema di esistenza e unicità vale nelle seguenti ipotesi:

I) $\vec{f}(t) \in L^2(Q) \qquad Q = \Omega \times 0 \vdash\!\dashv T$

II) $\alpha_i(t) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_i)) \qquad i = 1, 2$

III) $\beta(t) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$

IV) $\beta(x, t) \geq 1/2$

V) $\vec{u}_0 \in V_0$.

2. – Diamo ora il Teorema di esistenza di una soluzione periodica come definita nel § 1. Per la dimostrazione seguiremo questa via: in un primo tempo dimostreremo che un sistema di equazioni differenziali ordinarie approssimanti dedotto dal sistema (1,1) ammette almeno una soluzione periodica; in un secondo tempo dimostreremo che la successione di tali soluzioni converge debolmente verso una soluzione periodica delle equazioni di Navier–Stokes.

Precisamente *dimostriamo il Teorema*:

Se le funzioni $\vec{f}(t)$, $\alpha_i(t)$, $(i = 1, 2)$, $\beta(t)$ *sono funzioni periodiche di periodo* T *e soddisfano alle ipotesi* I, II, III, IV *del teorema di esistenza enunciato al* § 1, *esiste almeno una soluzione periodica di periodo* T *del sistema di Navier–Stokes nel senso già precisato.*

Consideriamo il sistema di equazioni approssimanti dedotto dalle (1,1) in modo analogo a quanto fatto in [2]:

$$(1,2) \qquad (\vec{u}_n'(t), \vec{g}_j)_{V_0} + \mu(\vec{u}_n(t), \vec{g}_j)_{V_1} + b(\vec{u}_n(t), \vec{u}_n(t), \vec{g}_j) - (\vec{f}(t), \vec{g}_j)_{V_0} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \left(\alpha_i(x, t) - \frac{1}{2} |\vec{u}_n(x, t) \times \vec{\nu}|^2\right) \vec{g}_j(x) \times \vec{\nu}\, d\Gamma_i -$$

$$- \int_{\Gamma_3} \beta(x, t) |\vec{u}_n(x, t) \times \vec{\nu}| (\vec{u}_n(x, t) \times \vec{\nu})\, \vec{g}_j(x) \times \vec{\nu}\, d\Gamma_3$$

ove si è posto:

$$\vec{u}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}(t)\, \vec{g}_j$$

e $\vec{g}_j$ è una base ortogonale in N_1.

Dal sistema (1,2), moltiplicando per $a_{j,n}(t)$ e sommando, otteniamo:

$$(2,2)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_0}+\mu\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_1}+b(\vec{u}_n(t),\vec{u}_n(t),\vec{u}_n(t))-(\vec{f}(t),\vec{u}_n(t))_{V_0}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_i}\left(\alpha_i(x,t)-\frac{1}{2}|\vec{u}_n(x,t)\times\vec{\nu}|^2\right)\vec{u}_n(x,t)\times\vec{\nu}\,d\Gamma_i-$$

$$-\int_{\Gamma_3}\beta(x,t)|\vec{u}_n(x,t)\times\vec{\nu}|(\vec{u}_n(x,t)\times\vec{\nu})^2\,d\Gamma_3.$$

Tenendo ora conto dell'ipotesi: $\beta(x,t)\geq 1/2$ la (2,2) si può scrivere: (Cfr. [2], § 4)

$$(3,2)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{V_0}+\mu\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_1}\leq(\vec{f}(t),\vec{u}_n(t))_{V_0}-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_i}\alpha_i(x,t)\,\vec{u}_n(x,t)\times\vec{\nu}\,d\Gamma_i$$

da cui si deduce:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_0}+\mu\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_1}\leq\|\vec{u}_n(t)\|_{V_0}\|\vec{f}(t)\|_{V_0}+\sum_{i=1}^{2}\|\alpha_i(t)\|_{L^2(\Gamma_i)}\|\vec{u}_n(t)\|_{L^2(\Gamma_i)}\leq$$

$$\leq\|\vec{u}_n(t)\|_{V_0}\|\vec{f}(t)\|_{V_0}+c_1\sum_{i=1}^{2}\|\alpha_i(t)\|_{L^2(\Gamma_i)}\|\vec{u}_n(t)\|_{V_1}$$

e quindi che:

$$(4,2)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_0}+\mu\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_1}\leq$$

$$\leq\|\vec{u}_n(t)\|_{V_1}\left\{c_2\|\vec{f}(t)\|_{V_0}+c_1\sum_{i=1}^{2}\|\alpha_i(t)\|_{L^2(\Gamma_i)}\right\}.$$

Integrando la (4,2) tra 0 e t $(0\leq t\leq T)$ e tenendo presente le ipotesi fatte su $\vec{f}(t)$ e $\alpha_i(t)$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}\|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_0}-\frac{1}{2}\|\vec{u}_n(0)\|^2_{V_0}+\mu\int_0^t\|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1}\,d\tau\leq$$

$$\leq\int_0^t\|\vec{u}_n(\tau)\|_{V_1}\left\{c_2\|\vec{f}(\tau)\|_{V_0}+c_1\sum_{i=1}^{2}\|\alpha_i(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)}\right\}d\tau\leq$$

$$\leq\left\{\int_0^t\|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1}\,d\tau\right\}^{1/2}\left\{2\int_0^t\left(c_2\|\vec{f}(\tau)\|^2_{V_0}+c_1\sum_{i=1}^{2}\|\alpha_i(\tau)\|^2_{L^2(\Gamma_i)}\right)^2d\tau\right\}^{1/2}$$

da cui per $t = T$ si deduce:

$$(5,2) \qquad \|\vec{u}_n(T)\|^2_{V_0} \leq \|\vec{u}_n(0)\|^2_{V_0} - 2\mu \int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau + 2c_3 \left\{ \int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \right\}^{1/2}$$

ove si è posto:

$$c_3 = 2 \left\{ \int_0^T \left(c_2 \|\vec{f}(\tau)\|^2_{V_0} + c_1 \sum_{i=1}^{2} \|\alpha_i(\tau)\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \right)^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Risulta quindi:

$$(6,2) \qquad \|\vec{u}_n(T)\|^2_{V_0} \leq \|\vec{u}_n(0)\|^2_{V_0} + 2\left(c_3 - \mu \left\{ \int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \right\}^{1/2} \right) \left\{ \int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \right\}^{1/2}.$$

Ora, se:

$$c_3 - \mu \left\{ \int_0^T \| u_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \right\}^{1/2} \leq 0$$

ossia se:

$$\int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \geq \frac{c_3^2}{\mu^2}$$

allora segue dalla (6,2):

$$\|\vec{u}_n(T)\|^2_{V_0} \leq \|\vec{u}_n(0)\|^2_{V_0}.$$

Se invece:

$$\int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau < \frac{c_3^2}{\mu^2}$$

allora $\exists \bar{t} \in 0 \vdash\!\dashv T$ tale che:

$$\|\vec{u}_n(\bar{t})\|^2_{V_0} \leq c_4 \|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_1} \leq c_4 \cdot \frac{c_3^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{T}.$$

Dalla (6,2) scritta per l'intervallo $(t, \bar{t})$, $0 \leq t \leq T$, si ottiene:

$$(7,2) \qquad \|\vec{u}_n(t)\|^2_{V_0} \leq \|\vec{u}_n(\bar{t})\|^2_{V_0} + 2c_3 \left| \int_{\bar{t}}^{t} \|\vec{u}_n(\tau)\|^2_{V_1} d\tau \right|^{1/2} \leq$$

$$\leq c_4 \cdot \frac{c_3^2}{\mu^2} \frac{1}{T} + 2c_3 \cdot \frac{c_3}{\mu} = c_5.$$

Segue che, se:

$$\|\vec{u}_n(0)\|_{V_0}^2 \geq c_5$$

deve necessariamente risultare:

$$\int_0^T \|\vec{u}_n(\tau)\|_{V_1}^2 \, d\tau \geq \frac{c_3^2}{\mu^2}$$

e quindi:

$$\|\vec{u}_n(T)\|_{V_0} \leq \|\vec{u}_n(0)\|_{V_0} . \tag{8,2}$$

Consideriamo ora la trasformazione S definita dalla relazione:

$$S(\vec{u}_0) = \vec{u}_n(T) \tag{9,2}$$

dove $\vec{u}_n(t)$ è la soluzione del sistema approssimante (1,2) soddisfacente la condizione iniziale: $\vec{u}_n(0) = \vec{u}_0$.

Questa soluzione esiste per ipotesi in tutto l'intervallo $0 \vdash\!\dashv T$.

La trasformazione S definita dalla (9,2) è continua e, per le (8,2), (7,2) muta in sè ogni sfera dello spazio euclideo S_n con centro l'origine e raggio $R \geq \sqrt{c_5}$.

Da un Teorema di punto unito di Tychonoff segue allora (Cfr. [3], [4]) l'esistenza di almeno un punto unito per la trasformazione S e quindi di almeno una soluzione periodica $\vec{v}_n(t)$ di periodo T per il sistema approssimante (1,2).

Occorre ora dimostrare che dalla successione $\{\vec{v}_n(t)\}$ di soluzioni periodiche approssimate si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente ad una soluzione periodica $\vec{v}(t)$ del sistema di Navier–Stokes.

Osserviamo innanzi tutto che per la soluzione $\vec{v}_n(t)$ vale la relazione:

$$\|\vec{v}_n(t)\|_{V_0} \leq \sqrt{c_5} . \tag{10,2}$$

Se infatti in un punto $\bar{t}$ fosse: $\|\vec{v}_n(\bar{t})\|_{V_0} > \sqrt{c_5}$ dovrebbe risultare, per quanto dimostrato sopra:

$$\|\vec{v}_n(\bar{t} + T)\|_{V_0} < \|\vec{v}_n(\bar{t})\|_{V_0}$$

il che è assurdo per la periodicità di $\vec{v}_n(t)$.

Consideriamo ora di nuovo il sistema approssimante (3,2) e pensiamo di scriverlo per le $\vec{v}_n(t)$. Da esso si deduce, integrando tra 0 e T:

$$\mu \int_0^T \|\vec{v}_n(\tau)\|_{V_1}^2 \, d\tau \leq \int_0^T (\vec{f}(\tau), \vec{v}_n(\tau))_{V_0} \, d\tau - \int_0^T \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \alpha_i(x,\tau) \, \vec{u}_n(x,\tau) \times \vec{\nu} \, d\Gamma_i \, d\tau$$

da cui segue:

$$\int_0^T \|\vec{v}_n(\tau)\|_{V_1}^2 \, d\tau \leq K . \tag{11,2}$$

Le (10,2), (11,2) sono due disuguaglianze analoghe alle maggiorazioni (Cfr. [2], § 4) che ci hanno permesso di dimostrare il Teorema di esistenza di una ed una sola soluzione in $0 \,\vdash\!\dashv\, T$ del sistema di Navier–Stokes, nel senso precisato al § 1 e per il problema che stiamo considerando. Quindi, con lo stesso procedimento utilizzato in [2], si dimostra che è possibile estrarre dalla successione $\{\vec{v}_n(t)\}$ una sottosuccessione (che chiameremo ancora $\{\vec{v}_n(t)\}$) convergente debolmente verso una funzione $\vec{v}(t)$ soddisfacente le condizioni *i*) *ii*) del § 1.

Il Teorema è così completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. PROUSE, *On the motion of a viscous incompressible fluid in a tube with permeable and deformable wall.* In corso di stampa sui « Rend. Acc. Naz. dei Lincei ».

[2] A. ZARETTI, *Un Teorema di esistenza in grande per un problema non lineare dell'idrodinamica.* In corso di stampa sui « Rend. dell'Ist. Lombardo di Scienze e Lettere ».

[3] G. PROUSE, *Su alcuni problemi per le equazioni di Navier–Stokes.* Rendiconti del Convegno sui problemi d'evoluzione, « Istituto di Alta Matematica », Roma, maggio 1970.

[4] G. PRODI, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier–Stokes nel caso bidimensionale,* « Rendiconti Sem. Mat. Padova », *30* (1960).