Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sul problema di Cauchy per una disequazione parabolica con convesso dipendente dal tempo e dato iniziale non nullo. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 140–144.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_140_0>

Analisi matematica. — *Sul problema di Cauchy per una disequazione parabolica con convesso dipendente dal tempo e dato iniziale non nullo* (*). Nota II (**) di MARCO BIROLI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

RÉSUMÉ. — On démontre le Théorème 3, enoncé dans I, et on donne un exemple d'application de cet théorème.

§ 1. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

Dimostriamo il Teorema 3 mediante il metodo di penalizzazione scegliendo come operatore di penalizzazione l'operatore

$$\beta(t)\, v = \mathrm{J}(v - \mathrm{P}_{\mathbf{K}(t)} v) \qquad v \in \mathrm{W}.$$

Notiamo che, fissato $v \in \mathrm{W}$, $\beta(t)\, v$ è integrabile e

$$(1,1) \qquad \langle \beta(t)\, v , v \rangle_{\mathrm{W}} \geq (\| \beta(t)\, v \|_{\mathrm{W}}^{*})^2$$

$$(1,2) \qquad \| \beta(t)\, v \|_{\mathrm{W}}^{*} \leq \| v \|_{\mathrm{W}} .$$

Dalla dimostrazione del Teorema 1, Nota 1, risulta inoltre che $\beta(t)\, v$ è, fissato t, continuo da W forte in W debole.

Consideriamo il problema

$$(1,3) \qquad \frac{du}{dt}(t) + \mathrm{A}(t)\, u(t) + \frac{1}{\varepsilon}\, \beta(t)\, u(t) = f(t) \qquad \text{q.o. su } [0,\mathrm{T}]$$
$$u(0) = u_0$$

e dimostriamo che (1,3) ha, $\forall \varepsilon > 0$, una soluzione $u(t)$.

Procediamo secondo il metodo di Faedo–Galerkin.

Sia $\{v_1, \cdots, v_n, \cdots\}$ una base di V e sia V_n il sottospazio sotteso dai vettori $\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Consideriamo il sistema approssimante

$$(1,4) \qquad \left\langle \frac{du_n}{dt}(t), v_j \right\rangle + \langle \mathrm{A}(t)\, u_n(t), v_j \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(t)\, u_n(t), v_j \rangle = \langle f(t), v_j \rangle \qquad j = 1, \cdots, n$$
$$u_n(t) \in \mathrm{V}_n \qquad u(0) = u_{0,n} \in \mathrm{V}_n$$

ove $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{0,n} = u_0$ in H.

Questo sistema ha una soluzione locale $u_n(t)$ definita sull'intervallo $[0, t_n]$ [1].

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano; lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1971.

Da (1,4) ed (1,1) si ha

$$(1,5)\qquad \frac{1}{2}\,|u_n(t)|^2 + \alpha\int_0^t \|u_n(s)\|^2\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (\|\beta(s)\,u_n(s)\|_W^*)^2\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^T \langle f(s)\,,\,u(s)\rangle\,ds + \frac{1}{2}\,|u_{0,n}|^2$$

per $t\in[0\,,T]$; da (1,5) si deduce che $u_n(t)$ può essere prolungata in una soluzione globale di (1,4) su $[0\,,T]$, che ancora indichiamo con $u_n(t)$.

Da (1,5) si deduce pure che

$$(1,6)\qquad |u_n(t)| \leq c_1 \qquad \text{q.o. in } [0\,,T]$$

$$(1,7)\qquad \int_0^T \|u_n(t)\|^2\,dt \leq c_2$$

$$(1,8)\qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (\|\beta(t)\,u_n(t)\|_W^*)^2\,dt \leq c_3$$

da cui

$$(1,9)\qquad \int_0^T \left(\left\|\frac{du_n}{dt}(t)\right\|^*\right)^2 dt \leq c_4\,.$$

Da (1,6) (1,7) (1,8) (1,9) si deduce che si può estrarre da $\{u_n(t)\}$ una sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con $\{u_n(t)\}$, tale che

$$(1,10)\qquad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{in} \quad C(0\,,T\,;H)$$

$$(1,11)\qquad \lim_{n\to+\infty}{}^{*}\, u_n(t) = u(t) \qquad \text{in} \quad \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V)$$

$$(1,12)\qquad \lim_{n\to+\infty}{}^{*}\,(A(t)\,u_n(t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(t)\,u_n(t)) = \chi(t) \quad \text{in} \quad \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V^*).$$

La funzione $u(t)$ soddisfa allora la relazione

$$(1,13)\qquad \frac{d}{dt}\,u(t) + \chi(t) = f(t)\,,$$

da cui

$$(1,14)\qquad \int_0^T \langle\chi(t)\,,\,u(t)\rangle = \frac{1}{2}\,|u_0|^2 - \frac{1}{2}\,|u(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t)\,,\,u(t)\rangle\,dt\,.$$

Inoltre

$$\max_{n\to+\infty}\lim \int_0^T \left\langle A(t)\, u_n(t) + \frac{1}{\varepsilon}\, \beta(t)\, u_n(t) \,,\, u_n(t) \right\rangle dt \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2}\, |u_{0,n}|^2 - \frac{1}{2}\, |u_n(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t) \,,\, u_n(t)\rangle\, dt \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\, |u_0|^2 - \frac{1}{2}\, |u(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t) \,,\, u(t)\rangle\, dt \right\} =$$

$$= \int_0^T \langle \chi(t) \,,\, u(t)\rangle\, dt \,.$$

Si ha allora, [2] pag. 179

$$\chi(t) = A(t)\, u(t) + \frac{1}{\varepsilon}\, \beta(t)\, u(t)\,. \tag{1,15}$$

Da (1,13) e (1,15) segue che $u(t)$ è soluzione di (1,3) e la tesi è dimostrata.

Consideriamo ora il problema (1,3) al variare di ε; per la prima parte della dimostrazione possiamo affermare, che, $\forall \varepsilon > 0$, (1,3) ha una soluzione $u_\varepsilon(t)$.

Da (1,3) si deduce

$$\frac{1}{2}\, |u_\varepsilon(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_\varepsilon(s)\|^2\, ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \langle \beta(s)\, u_\varepsilon(s) \,,\, u_\varepsilon(s)\rangle\, ds \leq \tag{1,16}$$

$$\leq \int_0^T \langle f(s) \,,\, u_\varepsilon(s)\rangle\, ds + \frac{1}{2}\, |u_0|^2$$

per $t \in [0\,,T]$; da (1,16) si deduce che

$$|u_\varepsilon(t)| \leq c_1 \qquad \text{q.o. su } [0\,,T] \tag{1,17}$$

$$\int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2\, dt \leq c_2 \tag{1,18}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \beta(t)\, u_\varepsilon(t) \,,\, u_\varepsilon(t)\rangle\, dt \leq c\,. \tag{1,19}$$

Da (1,17) (1,18) (1,19), procedendo come in, [2] pag. 393, si deduce che

$$(1,20) \qquad \int_0^s \langle v'(t) + A(t)\,u(t) - f(t)\,,\,v(t) - u(t)\rangle\,dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\{|v(s) - u(s)|^2 - |v(0) - u_0|^2\}$$

per $s \in [0,T] - \Delta$ ove $\Delta \subset [0,T]$ non dipende da $v(t)$ e $m(\Delta) = 0$
$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V)$ con $v'(t) \in \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;H)$
$v(t) \in \mathbf{K}(t)$ q.o. in $[0\,,T]$
$u(t) \in \mathfrak{L}^2(0\,,T\,;V)$ $u(t) \in \mathbf{K}(t)$ q.o. in $[0\,,T]$.

Poniamo

$$v(t) = \begin{cases} = 0 & t \in]\delta\,,T] \\ = u_0 & t \in [0\,,\delta_0] \end{cases}$$

$0 \leq \delta < \delta_0$.

Da (1,20) si deduce allora

$$\lim_{t \to 0+} u(t) = u_0 \qquad \text{in } H\,.$$

Per la parte riguardante la unicità è sufficiente osservare che se $\mathbf{K}(t_1) \subset \mathbf{K}(t_2)$ per $t_1 \leq t_2$, la soluzione dell'equazione

$$\eta w'_\eta(t) + w_\eta(t) = w(t)$$

$$w(0) = u_0$$

è tale che, se $w(t) \in \mathbf{K}(t)$ q.o. in $[0\,,T]$, $w_\eta(t) \in \mathbf{K}(t)$ q.o. in $[0\,,T]$; si può allora dimostrare la unicità e la continuità in H di $u(t)$ seguendo i metodi usuali, [2] pagg. 393-394.

§ 2. UN ESEMPIO

Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato di frontiera Γ sufficientemente regolare.

Supponiamo che Γ abbia misura superficiale in $\mathbf{R}^n$ finita e poniamo $\Sigma = [0\,,T] \times \Gamma$; sia Σ_0 una parte superficialmente misurabile di Σ e $\Gamma(t)$ la sezione di Σ_0 all'istante t.

Supponiamo che $\Gamma(t)$ sia misurabile superficialmente in $\mathbf{R}^n$ q.o. in $[0\,,T]$.

Consideriamo il convesso di $\mathfrak{L}^2(\Gamma)$

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) = \{v(x) \in \mathfrak{L}^2(\Gamma)\,|\,v(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su } \Gamma_t\}\,;$$

esso è chiuso in $\mathfrak{L}^2(\Gamma)$ ed è facile vedere che $\tilde{\mathbf{K}}(t)$ soddisfa, assunto $W = \mathfrak{L}^2(\Gamma)$, le condizioni del Teorema 1; quindi è integrabile su $[0\,,T]$.

Ricordando un noto Teorema di prolungamento e di traccia, [3], che lega le funzioni di $\mathfrak{L}^2(\Gamma)$ e le funzioni di $H^{1/2}(\Omega)$, possiamo asserire che

$$\mathbf{K}(t) = \{v(x) \in H^{1/2}(\Omega) \mid v(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su } \Gamma(t)\}$$

è una funzione avente come valori insiemi chiusi e convessi di $H^{1/2}(\Omega)$, misurabile su $[0, T]$.

Poniamo $V = H^1(\Omega)$, $W = H^{1/2}(\Omega)$, $H = \mathfrak{L}^2(\Omega)$ e definiamo $A : V \to V^*$ mediante la relazione

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + \lambda u(x) v(x) \right\} dx \qquad \lambda > 0$$

$$\forall u(x), v(x) \in H^1(\Omega).$$

Sia $u_0(x) = 0$ e $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; (H^1(\Omega))^*)$; si può allora applicare alla disequazione (1,2) della Nota I, il Teorema 3.

Notiamo che se $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ il problema (1,2) della Nota I equivale formalmente al problema, [2], pag. 280

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) + \lambda u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{q.o. su } \mathbf{R} \times \Omega$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega$$

$$u(t,x)\Big|_{\Sigma_0} \geq 0 \qquad \text{q.o.}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} \geq 0 \qquad \text{q.o.}$$

$$u(t,x) \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\Big|_{\Sigma_0} = 0 \qquad \text{q.o.}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\Big|_{\Sigma - \Sigma_0} = 0 \qquad \text{q.o.}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CODDINGTON E. e LEVINSON N., *Theory of ordinary differential equations*, MacGraw-Hill (1955).

[2] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars (1969).

[3] LIONS J. L. e MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod 1968.