Ermanno Lanconelli

Su una classe di moltiplicatori di $\mathfrak{F}L_p$ ed applicazioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.3-4, p. 133–139.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_3-4_133_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Matematica. – *Su una classe di moltiplicatori di $\mathfrak{F}L_p$ ed applicazioni.* Nota (*) di ERMANNO LANCONELLI, presentata dal Socio G. SCÒRZA DRAGONI.

SUMMARY. — We get a class of $\mathfrak{F}L_p(R^n)$ multipliers which contains, for example, the functions of type $\exp(if)$, f real-valued. Some applications to the spectrum of partial differential operators on $L_p(R^n)$ are given.

NOTAZIONI. – Con R^n indichiamo lo spazio euclideo delle n–ple $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ di numeri reali; il prodotto interno di R^n sarà indicato col simbolo $\langle , \rangle$; poniamo $|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle$. Fissato $a \in R^n$, $a_j > 0$ per $j = 1, \cdots, n$, poniamo

$$|\xi|_a = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{2/a_j} \right)^{1/2}.$$

Se $\alpha \in R^n$ ha coordinate intere non negative, poniamo $\xi^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j}$. Chiameremo *a–grado* del monomio ξ^α il prodotto $\langle a, \alpha \rangle$; l'*a–grado* di un polinomio è il massimo a–grado dei suoi monomi. Diremo infine che $g : R^n \to R$ è *positivamente a–omogenea* di grado b se $g > 0$ e se, per ogni $t > 0$, $g(t^{a_1}\xi_1, \cdots, t^{a_n}\xi_n) = t^b g(\xi)$.

Per $1 < q < \infty$, $L_q^r(R^n)$ indica lo spazio di Sobolev di indice $r = (r_1, \cdots, r_n)$ introdotto in [5]; $B_q^r(R^n)$ indica invece l'analogo spazio di Besov (per la definizione si veda, ad esempio [4]); nel seguito supporremo sempre $r_j > 0$ per ogni j. Ricordiamo che lo spazio $B_q^k(R)$ si può ottenere mediante interpolazione fra L_q ed L_q^h dove h è un intero più grande di k (si veda ad esempio [6]). Ricordiamo inoltre che, per ogni t, $0 < t < 1$, $B_q^r(R^n)$ è immerso con continuità in $L_q^{tr}(R^n)$.

Poniamo $D_j = -i\partial/\partial\xi_j$ e, se α è un multiindice intero non negativo $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n}$.

Con $C_0^\infty(R^n)$ indichiamo l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto; se l è un vettore di R^n a coordinate intere non negative, $C^l(R^n)$ indica l'insieme delle funzioni $f : R^n \to \mathbf{C}$ con $D_j^k f$ continua per $0 \leq k \leq l_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

$\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{F}^{-1}$ indicano la trasformata di Fourier e la sua inversa.

Diremo che f appartiene ad M_p (o che f è un moltiplicatore di $\mathfrak{F}L_p$) se l'applicazione T_f, definita formalmente come segue

$$T_f(\varphi) = \mathfrak{F}^{-1}(f\mathfrak{F}\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

è tale che $\sup\{\|T_f(\varphi) ; L_p(R^n)\| ; \varphi \in C_0^\infty(R^n), \|\varphi ; L_p(R^n)\| \leq 1\} \equiv M_p(f) < +\infty$ (per le principali proprietà di M_p si veda [3]).

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1971.

1. – Alcuni teoremi sui moltiplicatori di $\mathfrak{F}L_p$.

Poiché la trasformata di Fourier è una isometria di $L_2(R^n)$ in sè che muta il prodotto di convoluzione nel prodotto puntuale, la convoluzione di due elementi di $L_2(R^n)$ è una funzione la cui trasformata di Fourier è sommabile; in simboli $L_2 * L_2 = \mathfrak{F}L_1 \subset M_1$. In generale vale il seguente Teorema dovuto a L. S. Hahn [2]:

siano $g \in L_q(R^n)$, $G \in L_{q'}(R^n)$ $(1/q + 1/q' = 1)$ *e sia* $f = G * g$; *allora* $f \in M_p$ *per* $|1/p - 1/2| \leq \min\{1/q, 1/q'\}$ *e*

$$M_p(f) \leq \|G\|_{q'} \|g\|_q .$$

Ricordiamo anche che ogni elemento f di $L_q^r(R^n)$, $1 < q < \infty$, si può scrivere nella forma seguente: $f = G_r * g$ dove $g \in L_q(R^n)$ e

$$(\mathfrak{F}G_r)(\xi) = \left[\sum_{j=1}^{n} (1 + \xi_j^2)^{r_j/\varrho}\right]^{-\varrho/2}$$

essendo $r = (r_1, \cdots, r_n)$, $\rho = \max r_j$ [4]; inoltre, la norma di g in $L_q(R^n)$ è equivalente alla norma di f in $L_q^r(R^n)$.

Abbiamo allora la seguente proposizione (cfr. Teorema 9 di [2]).

Proposizione 1.1. – *Se* $q > \sum_{j=1}^{n} 1/r_j$, $q > 1$, *lo spazio* $L_q^r(R^n)$ *è immerso con continuità in* M_p *per* $|1/p - 1/2| \leq \min\{1/2, 1/q\}$.

Dimostrazione. – Posto $\sigma = \sum_{j=1}^{n} 1/r_j$ riesce [4]:

$$\exp(a|\xi|)\,|G_r(\xi)| \leq c \cdot \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{r_j(\sigma-1)}\right)^{-1}, & \sigma < 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \lg(1 + |\xi_j|^{-1}), & \sigma = 1, \quad a, c > 0, \\ 1, & \sigma > 1 \end{cases}$$

e quindi $G_r \in L_{q'}$ se $q > \sigma$.

Supponiamo dapprima $q \geq 2$. Se $f \in L_q^r(R^n)$ risulta $f = G_r * f$ con $G_r \in L_{q'}(R^n)$ e $g \in L_q(R^n)$; per il Teorema di Hahn $f \in M_p$ per $|1/p - 1/2| \leq 1/q$ e

$$M_p(f) \leq \|G_r\|_{q'} \|g\|_q \leq C_r \|f ; L_q^r(R^n)\| .$$

Se $1 < q < 2$, $L_q^r(R^n)$ è immerso con continuità in $L_2^s(R^n)$, dove $s = (s_1, \cdots, s_n)$, $s_j = r_j[1 - (1/q - 1/2)\sigma]$. Poiché $\sum_{j=1}^{n} 1/s_j < 2$, per quanto già dimostrato, riesce $L_2^s(R^n) \subset M_1$ con immersione continua. D'altra parte M_1 è immerso con continuità in M_p per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$. Abbiamo dunque la seguente catena di inclusioni continue:

$$L_q^r(R^n) \subseteq L_2^s(R^n) \subseteq M_1 \subseteq M_p , \qquad \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} .$$

Ciò prova l'asserto.

PROPOSIZIONE 2.1. – *Se* $q > \sum_{j=1}^{n} 1/r_j$, $q > 1$, $B_q^r(R^n)$ *è immerso con continuità in* M_p *per* $|1/p - 1/2| \leq \min\{1/2, 1/q\}$.

Dimostrazione. – Poiché $q > \sum_{j=1}^{n} 1/r_j$, esiste t tale che $0 < t < 1$ e $q > \sum_{j=1}^{n} 1/tr_j$. Allora $B_q^r(R^n)$ è immerso con continuità in $L_q^{tr}(R^n)$ mentre quest'ultimo, per la proposizione precedente, è contenuto in M_p per $|1/p - 1/2| \leq \min\{1/2, 1/q\}$.

Il Teorema seguente costituisce una naturale estensione del Teorema 2.2 di [7].

TEOREMA 1.1. – *Sia* a *un vettore di* R^n *a coordinate positive ed* l *un vettore di* R^n *a coordinate intere non negative. Sia* $f \in C^l(R^n)$; *se esistono* $A > 0$, $b > 0$, $\theta_j \leq 1$ *per* $j = 1, \cdots, n$ *tali che*

$$(1.1) \qquad |D_j^k f(\xi)| \leq A(1 + |\xi|_a)^{-\theta_j a_j k - b}$$

per ogni intero k, $0 \leq k \leq l_j$, $j = 1, \cdots, n$, *allora* $f \in M_p$ *se* $1 \leq p \leq \infty$ e

$$(2.1) \qquad \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}\right)^{-1}, \qquad \lambda_j = \min\left\{l_j, \frac{b}{(1-\theta_j)a_j}\right\}.$$

Inoltre

$$(3.1) \qquad M_p(f) \leq C_{p,b} A$$

essendo $C_{p,b}$ *una opportuna costante dipendente solo da* p, b *e da* n.

Osservazioni. – i) Se, per ogni $j = 1, \cdots, n$, si ha $\theta_j = 1$ ed $l_j = l > n/2$, allora $f \in M_p$ per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$ (cfr. col Teorema di Fabes-Rivière [1], pag. 28);

ii) Se, per ogni $j = 1, \cdots, n$, $\theta_j = \theta$, $l_j = l$, $a_j = 1$ allora $f \in M_p$ per $1 \leq p \leq \infty$, $n|1/p - 1/2| < \min\{l, b/(1-\theta)\}$; si ottiene così il Teorema 2.2 di [7].

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 1.1. il seguente Lemma 1.1.

LEMMA 1.1. – *Sia* $f \in C^l(R^n)$ *e sia* $K = \operatorname{supp} f$ *compatto*; *se esistono due costanti* $A > 0$ *e* $B > 1$ *tali che*

$$(4.1) \qquad \sup|D_j^k f| \leq AB^k, \qquad 0 \leq k \leq l_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

allora

$$\|f; B_q^r(R^n)\| \leq C_{q,r}(K)\, A \max_{1 \leq j \leq n} B^{r_j}, \qquad 1 < q < \infty,$$

per ogni $r = (r_1, \cdots, r_n)$, $0 < r_j < l_j$, $j = 1, \cdots, n$. $C_{q,r}(K)$ *dipende solo dalle variabili indicate e da* n.

Dimostrazione. – Per ogni $\xi \in R^n$, indichiamo con $\xi^{(j)} \in R^{n-1}$ il vettore $(\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_n)$; scriveremo $\xi = (\xi_j, \xi^{(j)})$ ed indicheremo con

$H(\xi^{(j)})$ la funzione caratteristica della proiezione di $K = \operatorname{supp} f$ sull'iperpiano $\xi_j = 0$. Fissato comunque $\xi^{(j)} \in R^{n-1}$, per (4.1) riesce

$$\|f(\cdot, \xi^{(j)}) ; L_q^{l_j}(R)\| \leq C_q(K)\, H(\xi^{(j)})\, AB^{l_j}, \tag{5.1}$$

e

$$\|f(\cdot, \xi^{(j)}) ; L_q(R)\| \leq C_q(K)\, H(\xi^{(j)})\, A, \tag{6.1}$$

e quindi interpolando fra (5.1) e (6.1)

$$\|f(\cdot, \xi^{(j)}) ; B_q^{r_j}(R)\| \leq C'_{q,r}(K)\, H(\xi^{(j)})\, AB^{r_j}, \qquad 1 < q < \infty, \tag{7.1}$$

per ogni $r_j \in R$, $0 < r_j < l_j$. Ma, posto $r = (r_1, \cdots, r_n)$

$$\|f(\cdot, \xi^{(j)}) ; B_q^r(R^n)\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{R^{n-1}} \|f(\cdot, \xi^{(j)}) ; B_q^{r_j}(R)\|^q \, d\xi^{(j)} \right)^{1/q}$$

quindi, per (7.1), si ha l'asserto.

Dimostrazione del Teorema 1.1. – Esiste $\omega \in C_0^\infty(R^n)$, $\omega \geq 0$, $\operatorname{supp} \omega \subseteq \{\xi \in R^n / 1/2 \leq |\xi|_a \leq 1\}$, tale che, posto $\omega_k(\xi) = \omega(2^{-ka_1}\xi_1, \cdots, 2^{-ka_n}\xi_n)$, riesce $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_k(\xi) = 1$, $\xi \neq 0$ (1). Se poniamo $\Omega = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k$ si ha $\Omega \in C_0^\infty(R^n)$; infatti se $|\xi|_a \geq 1$ e $k \leq 0$ è $\omega_k(\xi) = 0$ e quindi $\Omega(\xi) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_k(\xi) = 0$.

Poiché M_p è invariante per trasformazioni affini, posto $f_k(\xi) = f(2^{ka_1}\xi_1, \cdots, 2^{ka_n}\xi_n)$, riesce

$$M_p(f\omega_k) = M_p(f_k\omega). \tag{8.1}$$

Valutiamo ora la norma in M_p di $f_k\omega$, per $k \geq 1$, utilizzando la Proposizione 2.1 ed il Lemma 1.1. Per ogni intero $h \leq l_j$ riesce

$$\sup |D_j^h f_k \omega| \leq CA\, 2^{k[ha_j(1-\theta_j)-b]} \tag{9.1}$$

per una opportuna costante C indipendente da $k \geq 0$. Se $l_j = 0$ per un certo j, non esistono p soddisfacenti la (2.1); supponiamo perciò $l_j > 0$ per ogni j. Per la (9.1) e per il Lemma 1.1, riesce:

$$\|f_k\omega ; B_q^r(R^n)\| \leq C_{q,r}(\omega)\, A \max_{1 \leq j \leq n} 2^{k[r_j a_j(1-\theta_j)-b]},$$

dove $r = (r_1, \cdots, r_n)$, $r_j \in R$, $0 < r_j < l_j$. Ma ora, per ogni $q > 1$, $q > \sum_{j=1}^{n} 1/r_j$, $B_q^r(R^n)$ è immerso con continuità in M_p se $|1/p - 1/2| \leq \min\{1/2, 1/q\}$.

(1) Per l'esistenza di una tale funzione si veda [1], pag. 29.

Riesce allora

$$M_p(f_k\omega) \leq C_r(\omega)\, A \max_{1\leq j\leq n} 2^{k[r_j(1-\theta_j)a_j-b]} \tag{10.1}$$

per

$$1 \leq p \leq \infty \quad , \quad |1/p - 1/2| < \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^{-1}\right)^{-1}. \tag{11.1}$$

Fissato p nell'intervallo $1 \leq p \leq \infty$ tale che $|1/p - 1/2| < \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}\right)^{-1}$ è possibile trovare, per ogni $j = 1, 2, \cdots, n$ un numero reale positivo $r_j < \lambda_j \leq l_j$ tale che valga anche (11.1). Per tale scelta di r_j esiste $\sigma > 0$ tale che $r_j a_j (1 - \theta_j) - b \leq (\lambda_j - \sigma) a_j (1 - \theta_j) - b$; ma il secondo membro di questa disuguaglianza è sempre $\leq -\delta$ dove δ è un opportuno numero reale positivo.

In definitiva, se $1 \leq p \leq \infty$ e se vale la (2.1), per la (8.1) e la (10.1), $M_p(f\omega_k) \leq C_p A\, 2^{-k\delta}$; ma allora $f(1 - \Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} f\omega_k \in M_p$ in quanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f\omega_k$ è assolutamente convergente in M_p; inoltre $M_p(f(1 - \Omega)) \leq C_{p,b} A$.

D'altra parte, grazie alla Proposizione 1.1, $f\Omega \in M_p$ per tutti i p, $1 \leq p \leq \infty$, verificanti (2.1) e $M_p(f\Omega) \leq C_p A$.

Ciò completa la dimostrazione.

2. – Alcune applicazioni

Sia $P(D)$ un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti. Indichiamo con $\mathfrak{N}(P)$ l'insieme $\{P(\xi) \mid \xi \in R^n\}$, con P_p la chiusura di $P(D)$ in $L_p(R^n)$, $1 \leq p < \infty$, e con $\sigma(P_p)$ lo spettro di P_p.

È noto che $\lambda \in \sigma(P_p)$ se e solo se $(P(\xi) - \lambda)^{-1} \notin M_p$ ([7], Teorema 2.3); poiché $M_p \subseteq L_\infty$, dovrà essere allora $\mathfrak{N}(P) \subseteq \sigma(P_p)$.

Il risultato ora richiamato ed il Teorema 1.1. ci consentono di provare il Teorema seguente (cfr. Teorema 1.1 di [7]).

TEOREMA 1.2. – *Sia* $P(D)$ *un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti; se* $|P(\xi)|^{-1} = O(|\xi|_a^{-1})$ *per* $\xi \to \infty$, *se l'a-grado di* $P(\xi)$ *è* q, *allora* $\sigma(P_p) = \mathfrak{N}(P)$ *per tutti i* p *soddisfacenti le disuguaglianze*

$$1 \leq p < \infty \quad , \quad n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{q-1}. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. – Se $\mathfrak{N}(P) = \mathbf{C}$, $(P - \lambda)^{-1} \notin L_\infty$ e quindi $(P - \lambda)^{-1} \notin M_p$, per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$; dunque $\sigma(P_p) = \mathbf{C}$ per $1 \leq p < \infty$.

Supponiamo allora $\mathfrak{N}(P) \neq \mathbf{C}$ e sia $\lambda \notin \mathfrak{N}(P)$. Mostreremo fra poco che $(P - \lambda)^{-1} \in M_p$ per tutti i p verificanti (1.2). Allora $\lambda \notin \sigma(P_p)$ e quindi $\sigma(P_p) \subseteq \mathfrak{N}(P)$; poiché l'inclusione inversa è vera per ogni p, ciò prova l'asserto.

Resta quindi da dimostrare l'inclusione $(P - \lambda)^{-1} \in M_p$. Supponiamo per semplicità $\lambda = 0$. Se Q è un polinomio di a–grado q_1 riesce: $Q(\xi) = O(|\xi|_a^{q_1})$ per $\xi \to \infty$; allora, poiché l'a–grado di $D_j^k P$ è $q - ka_j$, risulta

$$\frac{D_j^k P(\xi)}{P(\xi)} = O(|\xi|_a^{q-ka_j-1}), \qquad \xi \to \infty, \tag{2.2}$$

per ogni intero $k \geq 0$. Poiché $D_j^k(P^{-1})$ è una combinazione lineare finita di termini del tipo $D_j^{l_1} P \cdot \cdots \cdot D_j^{l_h} P/P^{h+1}$ con $l_1 + \cdots + l_h = k$, e $h = 1, \cdots, k$, per (2.2) si ha

$$D_j^k \frac{1}{P(\xi)} = O(|\xi|_a^{-\theta_j ka_j - 1}), \qquad \xi \to \infty,$$

dove $\theta_j = 1 - (q-1)\, a_j^{-1}$. D'altra parte, poiché $0 \notin \mathfrak{N}(P)$, $P^{-1} \in C^\infty(R^n)$ quindi, per il Teorema 1.1, $P^{-1} \in M_p$ per tutti i p soddisfacenti (1.2).

Ciò completa la dimostrazione.

Ad esempio, sia $P(t, \xi) = (t - |\xi|^2 - i)(t + |\xi|^2 + i)$, $(t, \xi) \in R^{n+1}$; allora $|P(t, \xi)|^{-1} = O(|(t, \xi)|_a^{-1})$ con $a = (1, 1/2, \cdots, 1/2)$; l'$a$–grado di P è 2. Allora $\sigma(P_p) = \mathfrak{N}(P)$ per $|1/p - 1/2| < 1/(n+1)$. Il Teorema 1.1 di [7] applicato allo stesso polinomio, fornisce $\sigma(P_p) = \mathfrak{N}(P)$ per $|1/p - 1/2| < 1/3(n+1)$.

Se P è quasi–ellittico le condizioni del Teorema sono soddisfatte con $a_j^{-1} =$ grado $P(0, \cdots, \xi_j, \cdots, 0)$ e $q = 1$. Allora $\sigma(P_p) = \mathfrak{N}(P)$ per tutti i p, $1 \leq p < \infty$.

Facciamo un'altra applicazione del Teorema 1.1.

Diremo che $g : R^n \to \mathbf{C}$ appartiene a $\mathbf{D}(a)$ se esiste un vettore $l = (l_1, \cdots, l_n)$ a coordinate intere non negative tale che $l_j > n/2$ per ogni j, $g \in C^l(R^n)$ ed inoltre $\left| |\xi|_a^{ka_j} D_j^k g \right| \leq C_k |g|$ per $0 \leq k \leq l_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

TEOREMA 2.2. – *Sia* $g \in \mathbf{D}(a)$ *a valori reali; se esiste* $b > 0$ *tale che* $[g(\xi)]^{\pm 1} = O(|\xi|_a^{\pm b})$, $\xi \to \infty$, *la funzione* $f = (1 + g^2)^{-\lambda/2} \exp(ig)$ *è in* M_p $(1 \leq p \leq \infty)$ *se* $\lambda > n\,|1/p - 1/2|$.

Dimostrazione. – Poiché $g \in \mathbf{D}(a)$ è facile riconoscere che $|D_j^k f(\xi)| \leq C_k |\xi|_a^{-ka_j} |g(\xi)|^{k-\lambda}$, per ogni intero positivo $k \leq l_j$. Scelto $\theta_j = 1 - b/a_j$ risulta allora

$$|D_j^k f(\xi)| = O(|\xi|_a^{-a_j k\theta_j - \lambda b}), \qquad \xi \to \infty$$

per ogni intero k, $0 \leq k \leq l_j$. Di qui, per il Teorema 1.1, si trae: $f \in M_p$ per $1 \leq p \leq \infty$, $|1/p - 1/2| < \lambda/n$ e quindi l'asserto.

Ad esempio, se g è una funzione positivamente a–omogenea di grado $b > 0$ e di classe $C^l(R^n - \{0\})$, $l = (l_1, \cdots, l_n)$, $l_j > n/2$ per $j = 1, \cdots, n$, allora $[g(\xi)]^{\pm 1} = O(|\xi|_a^{\pm b})$ ed inoltre $\left| |\xi|_a^{\langle a, \alpha \rangle} D^\alpha g \right| \leq C_\alpha |g|$; infatti, basta osservare che il rapporto di due funzioni di tale classe positivamente a–omogenee dello stesso grado è limitato in R^n e che anche $\xi \to |\xi|_a^{\langle a, \alpha \rangle} D^\alpha g(\xi)$ è una funzione positivamente a–omogenea di grado $b > 0$.

Se $\varphi \in C^{\infty}(R^n)$ è uguale ad 1 per $|\xi|_a > 2$ ed uguale a zero per $|\xi|_a \leq 1$ dal Teorema sopra dimostrato si trae: $\varphi g^{-\lambda} \exp(ig) \in M_p$ se $\lambda > n\,|1/p - 1/2|$ (cfr. [8], Teorema 3.1). In particolare, se g è la « a–norma » definita implicitamente dall'equazione $\sum_{j=1}^{n} x_j^2/g^{2a_j} = 1$, $\varphi g^{-\lambda} \exp(ig^m) \in M_p$ $(m > 0)$ se $\lambda/m > n\,|1/p - 1/2|$ (cfr. [9], pag. 113).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. F. FABES e N. M. RIVIÈRE, « Studia Math. », *27* (1966).
[2] L. S. HAHN, « Trans. Amer. Math. Soc. », *128* (1967).
[3] L. HÖRMANDER, « Acta Math. », *104* (1960).
[4] P. I. LIZORKIN, « Dokl. Akad. Nauk, SSSR », *163* (1965).
[5] P. I. LIZORKIN, « Dokl. Akad. Nauk, SSSR », *170* (1966).
[6] J. PEETRE, « C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. », *A 264* (1967).
[7] M. SCHECHTER, « Ann. Sc. Norm. Sup. », *24*, Pisa 1970.
[8] S. SJÖSTRAND, « Ann. Sc. Norm. Sup. », *24*, Pisa 1970.
[9] E. M. STEIN, « Princeton Mathematical Series », *30* (1970).