Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

P. Dominique Vincensini

Sur la courbure d'homothétie des couples d'hypersurfaces associées de certaines variétés lorentziennes. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **51** (1971), n.1-2, p. 53–55.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_51_1-2_53_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

Relatività. — *Sur la courbure d'homothétie des couples d'hypersurfaces associées de certaines variétés lorentziennes.* Nota II di P. DOMINIQUE VINCENSINI, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

RIASSUNTO. — In questa Nota, e a complemento di due altre pubblicazioni concernenti un certo tipo di varietà lorenziane, l'autore stabilisce un nuovo risultato circa le curvature, in ogni punto di dette varietà, di due ipersurficie isotrope immerse nelle varietà stesse.

1. – Je me propose dans cette Note, relative aux espace–temps dits $M^4_{d\cdot a}$ dans une Note antèrieure [1], et en complément d'une autre Note publiée dans les *Comptes rendus de l'academie des Sciences de Paris* [2], d'indiquer une propriété des *couples d'hypersurfaces isotropes associées* issues des divers points des dits espaces introduites en [2], relative à la courbure d'homothétie [3] de ces hypersurfaces.

2. – Rappelons d'abord la définition d'un espace $M^4_{d\cdot a}$. Un tel espace s'obtient [5], à partir de l'espace M^4 de Minkowski rapporté à un repère Galiléen relativement auquel le ds^2 est

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

en introduisant une fonction (dite *de déviation*) $P(t)$ de façon que le ds^2 prenne la forme

$$ds^2 = -dx^2 - (1 - P)\,dy^2 - (1 + P)\,dz^2 + dt^2. \tag{1}$$

Si l'on pose: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = t$, et si l'on introduit comme en [2] le repère orthonormé $R_e\{p, e_k\}$ dont la base duale est définie par les 1–formes ω^k

$$\omega^1 = dx^1 \quad , \quad \omega^2 = (1 - P)^{1/2}\,dx^2 \quad , \quad \omega^3 = (1 + P)^{1/2}\,dx^3 \quad , \quad \omega^4 = dx^4, \tag{2}$$

on a pour le ds^2 de la $M^4_{d\cdot a}$ envisagée [1]

$$ds^2 = (\omega^4)^2 - \sum_\alpha (\omega^\alpha)^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j\,, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{3}$$

$$(\det.\ g_{ij} = P^2 - 1 \;,\; P^2 < 1)\,,$$

et la $M^4_{d\cdot a}$ est structurée par les équations

$$\begin{cases} de_\alpha = \omega^k_\alpha\, e_k\,, \\ de_k = -\,\omega^\alpha_k\, e_\alpha\,, \end{cases} \qquad \omega^k_i = \gamma^k_{ij}\,\omega^j \;;\; i, k, j = 1, 2, 3, 4\,, \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

les ω_α^k étant liées par les équations de structure de E. Cartan

$$d \wedge \omega^\alpha = \omega^k \wedge \omega_k^\alpha \quad , \quad d \wedge \omega^4 = - \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^4 ,$$

et les coefficients γ_{ij}^k, comme il a été dit en [2], étant tous nuls sauf γ_{33}^4 et γ_{22}^4 qui ont les expressions

$$(5) \qquad \gamma_{33}^4 = - \frac{\dot{\mathrm{P}}}{1+\mathrm{P}} \quad , \quad \gamma_{22}^4 = \frac{\dot{\mathrm{P}}}{1-\mathrm{P}} , \qquad \left(\dot{\mathrm{P}} = \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right) .$$

3. – Introduisons [2], comme il est fait en [4], le nouveau repère (*quasi-normal*) $\mathrm{R}_\xi \equiv \{\boldsymbol{p} , \xi_k\}$ pour lequel le ds^2 de la $\mathrm{M}_{d\,a}^4$ prend la forme

$$(6) \qquad ds^2 = 2\,\alpha^1\,\alpha^4 - (\alpha^2)^2 - (\alpha^3)^2 ,$$

où les α^i sont liés aux ω^j relatifs à R_e par les relations

$$(7) \qquad \alpha^1 = \frac{\omega^4 - \omega^1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \alpha^2 = \omega^2 \quad , \quad \alpha^3 = - \omega^3 \quad , \quad \alpha^4 = \frac{\omega^4 + \omega^1}{\sqrt{2}} .$$

On voit que les deux équations $\alpha^1 = 0$, $\alpha^4 = 0$, lesquelles sont complètement intégrables puisque des relations (2) on déduit

$$\alpha^1 = (dt - dx)/\sqrt{2} \quad , \quad \alpha^4 = (dt + dx)/\sqrt{2} ,$$

définissent deux familles à un paramètre d'hypersurfaces (*hypersurfaces isotropes de défaut 1* selon [4]), et que par le point génerique $\boldsymbol{p}$ de $\mathrm{M}_{d \cdot a}^4$ passent deux telles surfaces, dites *associeés*.

On a établi en [2] qu'en chaque point de $\mathrm{M}_{d \cdot a}^4$ les hypersurfaces associées ont la même *pseudo-courbure principale*, dont l'expression au moyen de la fonction de déviation $\mathrm{P}(t)$ de l'espace est: $(\dot{\mathrm{P}})^2/2(\mathrm{P}^2 - 1)$.

A ce résultat nous pouvons maintenant ajouter le suivant, concernant les mêmes hypersurfaces associées.

Des équations (7) on déduit les formes de connexion α_β^γ relatives au repère $\mathrm{R}_\xi \equiv \{\boldsymbol{p} , \xi_k\}$ actuellement adopté: $\alpha_\beta^\gamma = l_{\beta k}^\gamma \alpha^k$, dans lesquelles les coefficients $l_{\beta k}^\gamma$ s'obtiennent aisément à partir des coefficients correspondants γ_{ik}^j qui figurent dans les équations $\omega_i^k = \gamma_{ij}^k\,\omega^j$ relatives au repère R_e (lesquels sont tous nuls comme on l'a dit, sauf γ_{33}^4 et γ_{22}^4 qui ont les expressions (5)). Parmi les dites formules de connexion figurent en particulier les suivantes

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha_1^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\dot{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}+1} \alpha^3 \quad , \quad \alpha_1^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\dot{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}-1} \alpha^2 , \\[2ex] \alpha_3^1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\dot{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}+1} \alpha^3 \quad , \quad \alpha_2^1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\dot{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}-1} \alpha^2 , \\[2ex] \alpha_1^1 = - \alpha_4^4 = 0 , \end{cases}$$

qui interviennent dans l'équation de structure relative à la forme α_1^1, dite en [3] *forme d'homothétie*:

$$(9) \qquad d \wedge \alpha_1^1 = \Omega_1^1 + \alpha^2 \wedge \alpha_2^1 + \alpha_2^3 \wedge \alpha_3^1 ,$$

laquelle équation, écrite dans l'hypothèse $\alpha^1 = 0$, définit Ω_1^1 comme courbure d'homothétie de l'une des deux hypersurfaces isotropes associées issues du point générique de la $M^4_{d \cdot a}$.

Les (8) montrent tout de suite que cette courbure d'homothétie a la valeur $\Omega_1^1 = 0$; et la même chose a lieu pour l'hypersurface isotrope associée, définie par $\alpha_4^4 = 0$, pour laquelle la courbure d'homothétie est $\Omega_4^4 = 0$.

On peut donc dire que les deux hypersurfaces isotropes associées issues d'un point quelconque d'une $M^4_{d \cdot a}$ ont, en ce point, *des pseudo-courbures principales égales, et des courbures d'homothétie nulles.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. D. VINCENSINI, Note I. *Sur l'espace-temps déduit d'une métrique de Minkowski etc.* Questi « Rendiconti », (1971).

[2] P. D. VINCENSINI, « C. R. Acad. Sc. Paris », 10 Mai 1971.

[3] M. A. TONNELAT, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthiers-Villars, Paris 1965.

[4] R. ROSCA, *Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans une variété lorentzienne*, « C. R. Acad. Sc. Paris », T. 272, sér. A, p. 393 (1971).