Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

P. Dominique Vincensini

Sur l'espace-temps déduit d'une métrique de Minkowski par l'introduction d'une deviation non statique asymétrique. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.6, p. 721–724.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_721_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Relatività. — *Sur l'espace–temps déduit d'une métrique de Minkowski par l'introduction d'une déviation non statique asymétrique.* Nota I di P. DOMINIQUE VINCENSINI, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

RIASSUNTO. — A complemento di una Nota recentemente pubblicata nei «Comptes–rendus de l'Academie des Sciences de Paris» il 10 maggio 1971, nella quale sono considerati dei tipi di Spazio–tempo introdotti da A. R. Prasana e M. K. Dadihich, l'Autore studia qui, dal punto di vista geometrico, alcune congruenze isotrope di curve nei medesimi spazi.

1. – A. R. Prasana et M. K. Dadihich [1] ont étudié, du point de vue de la structure du champ gravitationnel d'Einstein, un espace-temps déduit d'une métrique de Minkowski par l'introduction d'une déviation non statique asymétrique.

La métrique de l'espace M^4 de Minkowski rapporté à un système de coordonnées galiléen réduit étant

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

celle de l'espace temps considéré par les auteurs précédents, que nous désignerons par $M^4_{d \cdot a}$, peut être mise sous la forme

$$ds^2 = -dx^2 - (1 - P)\, dy^2 - (1 + P)\, dz^2 + dt^2, \tag{2}$$

où $P(t)$ est une fonction du temps, dite *fonction de déviation.*

Dans une Note récente des Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [2], et moyennant l'emploi d'un repère orthonormé $R_e \equiv \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_k\}$ ($\boldsymbol{p} \in M^4_{d \cdot a}$, $k = 1, 2, 3, 4$) dont la base duale est constituée par les 1–formes ω^k

$$\omega^1 = dx \quad , \quad \omega^2 = (1 - P)^{1/2} dy \quad , \quad \omega^3 = (1 + P)^{1/2} dz \quad , \quad \omega^4 = dt\,, \tag{3}$$

la fonction de déviation a été reliée aux coefficients γ^4_{33}, γ^4_{22} qui interviennent dans les 1–formes de connexion ω^k_i figurant dans les équations de structure

$$\left\{\begin{aligned} d\boldsymbol{p} &= -\boldsymbol{e}_\alpha\, \omega^\alpha + \boldsymbol{e}_4\, \omega^4\,, && \alpha\,, \beta\,, \gamma = 1\,, 2\,, 3 = \text{indices spatiaux},\\ d\boldsymbol{e}_\alpha &= \omega^k_\alpha\, \boldsymbol{e}_k\,, && 4 = \text{indice temporel},\\ d\boldsymbol{e}_4 &= -\omega^\alpha_4\, \boldsymbol{e}_\alpha\,, && \\ \omega^k_i &= \gamma^k_{ij}\, \omega^j\,, && i\,, k\,, j = 1, 2\,, 3\,, 4\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

par les relations

(5) $$\gamma^4_{33} = -\frac{\dot{P}}{1+P} \quad , \quad \gamma^4_{22} = \frac{\dot{P}}{1-P} \, , \qquad \left(\dot{P} = \frac{dP}{dt}\right) ,$$

tous les $\gamma^4_{i,j}$, sauf γ^4_{33} et γ^4_{22} étant nuls.

En posant: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = t$, le ds^2 de $M^4_{d \cdot a}$ affecte d'ailleurs la forme

(6) $$ds^2 = \langle d\boldsymbol{p} , d\boldsymbol{p} \rangle = (\omega^4)^2 - \sum_{\alpha} (\omega^\alpha)^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j ,$$

où l'on a: det. $g_{ij} = P^2 - 1$, avec $P^2 < 1$ afin que la signature de (2) soit hyperbolique.

2. – Rappelons maintenant quelques considérations développées en [3], fondées sur le formalisme vectoriel complexe déduit de l'isomorphisme $\mathfrak{L} \to SO^3(C)$ [$\mathfrak{L}$ = groupe de Lorentz; $SO^3(C)$ = groupe tridimensionnel complexe des rotations] par l'introduction du repère (de Sachs [4]) $R_h = \{\boldsymbol{p} , \boldsymbol{h}_k\}$, pour lequel les deux, vecteurs $\boldsymbol{h}_1$ et $\boldsymbol{h}_4$ sont isotropes réels, les deux autres $\boldsymbol{h}_2 , \boldsymbol{h}_3$ étant complexes conjugués, et R_h étant normalisé de façon que l'on ait

$$\langle \boldsymbol{h}_1 , \boldsymbol{h}_4 \rangle = 1 \quad , \quad \langle \boldsymbol{h}_2 , \boldsymbol{h}_3 \rangle = -1 ,$$

tous les autres produits scalaires étant nuls. Si $\Theta^k \in T^*(\boldsymbol{p})$ est la base duale de $\boldsymbol{h}_k \in T(\boldsymbol{p})$ [$T(\boldsymbol{p})$ = espace vectoriel tangent en $\boldsymbol{p}$ à $M^4_{d \cdot a}$, les formes Θ^k vérifient les conditions de réalité:

$$\bar{\Theta}^1 = \Theta^1 \quad , \quad \bar{\Theta}^4 = \Theta^4 \quad , \quad \bar{\Theta}^2 = \Theta^3 \qquad (\bar{\Theta} = \text{complexe conjugué de } \Theta).$$

Considérons, suivant [3], les 2-formes autoduales complexes Z^α (de l'espace complexe C^3) définies par

(7) $$Z^1 = \Theta^3 \wedge \Theta^4 \quad , \quad Z^2 = \Theta^1 \wedge \Theta^2 \quad , \quad 2Z^3 = \Theta^1 \wedge \Theta^4 - \Theta^2 \wedge \Theta^3 ,$$

lesquelles, avec leurs conjuguées $\bar{Z}^\alpha$, forment une base de l'espace $E^{\wedge(2)}$ des 2-formes $\Theta^i \wedge \Theta^k$.

L'introduction de la connexion riemannienne donne

(8) $$d \wedge Z + \sigma \wedge Z \longleftrightarrow dZ^i + \sigma^i_j \wedge Z^j = 0 ,$$

soit en développant

(9) $$\begin{cases} d \wedge Z^1 = -\frac{1}{2}\, \sigma_3 \wedge Z^1 - \sigma_2 \wedge Z^3 , \\ d \wedge Z^2 = \frac{1}{2}\, \sigma_3 \wedge Z^2 + \sigma_1 \wedge Z^3 , \\ d \wedge Z^3 = \frac{1}{2}\, \sigma_1 \wedge Z^1 - \frac{1}{2}\, \sigma_2 \wedge Z^2 , \end{cases}$$

où les σ_α, $\overline{\sigma}_\alpha$ ont les expressions

(10) $$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha k}\,\theta^k \quad , \quad \overline{\sigma}^k = \overline{\sigma}_{\alpha k}\,\theta^k ,$$

(les coefficients $\sigma_{\alpha k}$, $\overline{\sigma}_{\alpha k}$ correspondant aux coefficients spinoriels de Newmann et Penrose [1]).

De ce qui précède, M. Cahen, R. Debever et L. Defrise [3] ont déduit les résultats suivants concernant la congruence $\mathfrak{J}$ des courbes tangentes aux vecteurs isotropes $\boldsymbol{h}_4$ (dirigés vers le futur):

Si

(11) $$\theta^1 \wedge (d \wedge Z^2) = 0 \Longleftrightarrow \sigma_{14} = 0 ,$$

la congruence $\mathfrak{J}$ est *géodésique*;

si

(12) $$\overline{\sigma}_1 \wedge Z^2 + \sigma_1 \wedge \overline{Z}^2 = 0 \Longleftrightarrow \sigma_{14} = 0 , \ \overline{\sigma}_{14} = 0 , \ \sigma_{12} = \overline{\sigma}_{13} ,$$

la congruence $\mathfrak{J}$ est en outre *sans rotation*;

si

(13) $$\sigma_{34} = \overline{\sigma}_{34} = 0 ,$$

le paramètre de déplacement le long de $\mathfrak{J}$ est *affine*;

enfin, les quantités

(14) $$\sigma = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_{13} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{2}\overline{\sigma}_{12} \qquad (\overline{\sigma}_{12} = \text{conjuguée de } \sigma_{13})$$

représentent respectivement la *distorsion* et la *rotation complexe* de $\mathfrak{J}$.

3. – En utilisant à présent les relations [5] qui traduisent le changement de repère $R_e \to R_h$ (après avoir changé l'orientation de R_h par la permutation de $\boldsymbol{h}_1$ et de $\boldsymbol{h}_4$), on obtient les formules générales

(15) $$\begin{cases} \sigma_1 = \omega_1^3 - \omega_3^4 + i\,(\omega_3^4 - \omega_1^2) , \\ \sigma_2 = \omega_1^3 + \omega_3^4 + i\,(\omega_2^4 + \omega_1^2) , \\ \sigma_3 = -2\,(\omega_1^4 + i\omega_2^3) . \end{cases}$$

Si dès lors on tient compte de ce que la transformation $R_e \to R_h$ implique, comme on peut le voir sans peine

(16) $$\omega^1 = \frac{\theta^4 - \theta^1}{\sqrt{2}} \ , \ \omega^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta^3 - \theta^2) \ , \ \omega^3 = -\frac{\theta^3 + \theta^2}{\sqrt{2}} \ , \ \omega^4 = \frac{\theta^4 + \theta^1}{\sqrt{2}} ,$$

et si l'on calcule, au moyen de (15), (16) et (10), les relations liant les coefficients σ_{ik}, $\overline{\sigma}_{ik}$ et γ^i_{jk}, on déduit des relations (5) (tous les coefficients γ^i_{jk} autres que γ^4_{33} et γ^4_{22} étant nuls comme il a été dit)

(17) $$\sigma_{14} = 0 \quad , \quad \overline{\sigma}_{14} = 0 \quad , \quad \sigma_{12} = \overline{\sigma}_{13} ,$$

(18) $$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{P\dot{P}}{P^2 - 1} \quad , \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\dot{P}}{P^2 - 1} \Rightarrow P = \frac{\sigma}{\rho}$$

(19) $$\sigma_{34} + \overline{\sigma}_{34} = 0 ,$$

et l'on peut donc énoncer le résultat suivant, qui donne entre autre une nouvelle interprétation géométrique, à adjoindre à celle déjà indiquée dans la Note [2], de la fonction de déviation de la métrique d'un espace $M^4_{d \cdot a}$.

Dans un tel espace la congruence $\mathfrak{J}$ tangente aux vecteurs isotropes (réels) dirigés vers le futur est *toujours géodésique et sans rotation*; le paramètre de déplacement le long de cette congruence est un paramètre *affine*; en outre la fonction de déviation de la métrique de l'espace est *le rapport entre la distorsion complexe et la rotation complexe de* $\mathfrak{J}$.

Bibliographie

[1] A. R. Prasana et M. K. Dadihich, *An asymmetric non-static deviation from the Minkowski metric*, « Dep. of math. and Statistics », Univ. of Poona, Poona 7.

[2] P. D. Vincensini, « C. R. Ac. Sc. Paris », séance du 10 mai 1971.

[3] M. Cahen, R. Debever et L. Defrise, *A complex vectorial formalism in general relativity*, « Journ. of math. and Mechanics », *16* (7), 1967.

[4] R. K. Sachs, *Gravitational waves in general relativity*, « Proc. Roy. Soc. » (1961).

[5] R. Rosca, *Sur les variétés pseudo-isotrvpes immergées dans une variété lorentzienne*, « Rev. Roumaine de Math. pures et appl. », *25* (9) (1970).