
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIO GIRARDI, ANTONIO MASCHIETTI

**Una condizione equivalente alla
 $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitività**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.6, p. 697–698.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_697_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Una condizione equivalente alla $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitività.* Nota di MARIO GIRARDI e ANTONIO MASCHIETTI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper a condition equivalent to $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitivity is given.

INTRODUZIONE

Dato un piano grafico π e fissati in esso quattro punti ω, ν, ξ, η a tre a tre non allineati, si suppone che il teorema di Desargues valga per ogni coppia di triangoli $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$ tali che:

- i) abbiano ciascuno un vertice sulla retta $\omega\eta$;
- ii) abbiano ciascuno un lato parallelo alla retta $\omega\nu$;
- iii) le rette $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ passino tutte per il punto η .

In queste ipotesi si verifica, abbastanza agevolmente, che l'anello ternario associato al piano grafico π (per le definizioni si veda [1], [2]) verifica la prima legge di linearità (Proposizione I), e l'associatività dell'addizione (Proposizione II). Da ciò discende che, nelle nostre ipotesi, l'anello ternario è un sistema cartesiano (ved. [2] per la definizione) e quindi il piano è $(\eta, \xi\eta)$ -transitivo.

Un teorema analogo è dimostrato in [3], Teorema I, però sotto ipotesi più restrittive. Inoltre, i metodi dimostrativi sono di natura diversa, essendo quello usato in [3] sintetico, mentre il nostro si avvale dell'anello ternario.

Sia π un piano grafico. In esso si possono introdurre le « coordinate » (ved. [1], [2]), fissando quattro punti ω, ν, ξ, η formanti un 4-arco (cioè a tre a tre non allineati). Le rette $\omega\xi$ e $\omega\eta$ si diranno anche asse delle x e asse delle y e ω punto origine. Supporremo in tutta questa Nota che ξ e η siano i punti impropri dell'asse delle x e delle y , rispettivamente e li indicheremo con ξ^∞ e η^∞ .

Fissato il riferimento $\omega, \nu, \xi^\infty, \eta^\infty$ resta determinato un insieme K su cui è definita una operazione ternaria, T . K , con l'operazione T , si dice un anello ternario, e sarà per il seguito indicato con (K, T) , se verifica le proprietà indicate in [2].

Ciò posto, supponiamo che il teorema di Desargues valga, nel piano π , per ogni coppia di triangoli $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$ tali che:

- i) abbiano ciascuno un vertice sulla retta $\omega\eta^\infty$;
- ii) abbiano ciascuno un lato parallelo alla retta $\omega\nu$;
- iii) le rette $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ passino tutte per il punto η^∞ .

Questa condizione sarà indicata con C.

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

PROPOSIZIONE I. - *C implica la prima legge di linearità, cioè $T(m, a, b) = ma + b$, per ogni m, a, b elementi di (K, T) .*

Dimostrazione. - A partire da $m, a, b \in (K, T)$, costruiamo i due triangoli:

$$\omega(o, o), \alpha(ma, ma), \beta(a, ma) \\ \omega'(o, b), \alpha'(ma, ma + b), \beta'(a, T(m, a, b)).$$

Siccome $\omega, \omega' \in \omega\eta^\infty$, $\omega\omega, \omega'\alpha'$ sono parallele a $\omega\omega$ e le coppie di rette $(\omega\beta, \omega'\beta'), (\omega\alpha, \omega'\alpha')$ sono composte di rette parallele, siamo nelle ipotesi della C, per cui $\alpha\beta$ è parallela alla $\alpha'\beta'$ e quindi $T(m, a, b) = ma + b$.

PROPOSIZIONE II. - *C implica l'associatività dell'addizione di (K, T) , cioè $a + (b + c) = (a + b) + c$, per ogni a, b, c elementi di (K, T) .*

Dimostrazione. - Consideriamo i due quadrangoli:

$$\alpha(o, b), \beta(b, b), \gamma(a + b, a + b), \delta(a, a + b) \\ \alpha'(o, b + c), \beta'(b, b + c), \gamma'(a + b, (a + b) + c), \delta'(a, a + (b + c)).$$

I due triangoli $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$ sono nelle ipotesi della condizione C e quindi $\alpha\gamma \parallel \alpha'\gamma'$. Consideriamo ora i due triangoli $\alpha\gamma\delta$ e $\alpha'\gamma'\delta'$. Anche questi sono nelle ipotesi della condizione C e poiché $\alpha\delta \parallel \alpha'\delta'$ e $\alpha\gamma \parallel \alpha'\gamma'$, si ha che $\delta\gamma \parallel \delta'\gamma'$, cioè δ' e γ' hanno la stessa « ordinata » e quindi $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ricordiamo (ved. anche [2]) che, detti α e l un punto ed una retta di un piano grafico, il piano si dice (α, l) -transitivo se esistono tutte le collineazioni di centro α ed asse l .

In [2] è dimostrato che la prima legge di linearità e l'associatività dell'addizione dell'anello ternario (K, T) associato ad un piano grafico π , rispetto ad un riferimento $\omega, \nu, \xi^\infty, \eta^\infty$ equivalgono a che il piano π sia $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitivo. Per le proposizioni I e II abbiamo allora che la condizione C implica che il piano π sia, rispetto al fissato riferimento, $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitivo. È ovviamente vero anche il viceversa e cioè che un piano $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitivo implica la condizione C. Ne discende allora la seguente

PROPOSIZIONE III. - *La condizione C equivale alla $(\eta^\infty, \xi^\infty \eta^\infty)$ -transitività.*

Abbiamo quindi (ved. [2]) che l'anello ternario associato ad un piano grafico verificante la condizione C è, rispetto alle due operazioni derivate di addizione e moltiplicazione, un *sistema cartesiano*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HALL M., *Projective planes*, «Trans. Math. Soc.», 54 (1943).
- [2] SEGRE B., *Lectures on modern Geometry*, with an Appendix by Lucio Lombardo-Radice. Cremonese, Roma, 1961.
- [3] LONGO C., *Teorema di Desargues ed omologie speciali di un piano grafico proiettivo*, «Atti Acc. Naz. Lincei», 24, 410-415 (1958).