Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Sulla completezza hilbertiana di successioni di funzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.6, p. 646–649.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_646_0>

Analisi matematica. — *Sulla completezza hilbertiana di successioni di funzioni.* Nota [(*)] del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — A sequence $\{\varphi_h\}$ of real functions, complete in the $\mathfrak{L}^2(\mathrm{T})$ space, relative to a set T of the euclidean r-space, is considered. A condition is given for the completeness of a subsequence $\{\psi_k\}$ of $\{\varphi_h\}$ in $\mathfrak{L}^2(\mathrm{U})$ (U subset of T).

Sia

$$\{\varphi(x)\} \equiv \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_h(x), \cdots, \tag{1}$$

una successione di funzioni reali [(1)] del punto x dello spazio euclideo $S_{(r)}$, a r dimensioni, quasi continue (nel senso di Tonelli) nell'insieme di punti lebesghiano T di detto spazio, ivi di quadrato sommabile. Supposto T di misura non nulla, dico, una tale successione, *hilbertianamente completa* in T [(2)], se le infinite equazioni

$$\int_{\mathrm{T}} f(x)\,\varphi_h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots), \tag{2}$$

nella funzione reale $f(x)$, essa pure quasi continua e di quadrato sommabile in T, sono soddisfatte soltanto se $f(x)$ è quasi ovunque nulla in T.

È ben nota l'importanza che ha, nell'Analisi matematica, sia qualitativa, sia esistenziale o quantitativa, il possesso di successioni di funzioni, complete in un dato insieme e con la Nota presente mi propongo di enunciare e dimostrare, su tali successioni, un teorema che non si trova nelle citate «*Lezioni*» loc. cit. [(1)], e non mi risulta che sia stato già, altrove, osservato.

È subito visto che: *Se per gl'insiemi lebesghiani* U *e* T *si ha* $\mathrm{U} \subset \mathrm{T}$, *ogni successione di funzioni completa in* T *lo è anche in* U.

Infatti, se per le funzioni dette della successione (1) e per una funzione $g(x)$, in U di quadrato sommabile, si ha:

$$\int_{\mathrm{U}} g(x)\,\varphi_h(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

per la funzione $f(x)$, così definita in T,

$$f(x) \begin{cases} = g(x), & \text{per } x \subset \mathrm{U}, \\ = 0, & \text{per } x \subset \mathrm{T} - \mathrm{U}, \end{cases} \tag{4}$$

(*) Presentata nella seduta del 18 giugno 1971.

(1) In ciò che segue avrei potuto considerare anche funzioni complesse, a patto però di rendere la mia esposizione inconsueta e di complicare i simboli adottati. Cfr. in proposito le *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione* di PICONE e VIOLA [editore Einaudi, Torino (1952)], Cap. IX.

(2) In seguito sottintenderò sempre, omettendolo, l'avverbio *hilbertianamente*.

che riesce, in T, di quadrato sommabile, sono soddisfatte le (2) e pertanto, supposta la completezza in T della successione (1), $f(x)$ dovrà essere quasi ovunque nulla in T e quindi anche in U, ma ivi è $f(x) = g(x)$.

TEOREMA. *Per gl'insiemi* U, V, T, *lebesghiani nello spazio* $S_{(r)}$ *dei punti* x *e di misura non nulla, si abbia*

$$T = U \cup V \quad , \quad \mathrm{mis}(U \cap V) = 0 .$$

La successione (1) *sia completa in* T. *La successione*

$$\{\psi(x)\} \equiv \psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_k(x), \cdots \tag{5}$$

sia subordinata alla (1) *e la successione*

$$\{\chi(x)\} \equiv \chi_1(x), \chi_2(x), \cdots, \chi_l(x), \cdots, \tag{6}$$

sia complementare alla (5) *nella* (1) [3]. *Per ogni funzione* $f(x)$ *quasi continua e di quadrato sommabile in* U, *sia possibile definire una funzione* $g(x)$, *quasi continua nell'insieme* V, *ivi di quadrato sommabile, tale che, dalle eguaglianze*

$$\int_U f(x)\, \psi_k(x)\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{7}$$

seguano le altre:

$$\int_V g(x)\, \psi_k(x)\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{8}$$

$$\int_U f(x)\, \chi_l(x)\, dx + \int_V g(x)\, \chi_l(x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots), \tag{9}$$

allora, dalla completezza in T *della successione* (1) *segue quella in* U *della successione* (5), *subordinata alla* (1).

(3) Data una successione di elementi

$$\{E\} \equiv E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots,$$

dico nei miei trattati d'Analisi matematica, la successione

$$\{G\} \equiv G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots,$$

subordinata alla $\{E\}$, se ad ogni numero naturale k, si può far corrispondere un altro n_k, tale che si abbia

$$G_k \equiv E_{n_k} \quad , \quad n_k < n_{k+1} .$$

La successione

$$\{H\} \equiv H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots,$$

ottenuta dalla $\{E\}$ privandola degli elementi della successione $\{G\}$, è detta a questa *complementare* nella successione $\{E\}$, e, pur essa, è a questa subordinata.

Dimostrazione. Si ponga

$$\Phi(x)\begin{cases} = f(x), & \text{per} \quad x \subset \mathrm{U}, \\ = g(x), & \text{per} \quad x \subset \mathrm{V}. \end{cases}$$

La funzione $\Phi(x)$ risulta quasi continua in T ed ivi di quadrato sommabile e si ha:

$$\int_{\mathrm{T}} \Phi(x)\,\varphi_h(x)\,\mathrm{d}x \begin{cases} = \displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{V}} g(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x, & \text{per} \quad \varphi_h \subset \{\psi\}, \\ = \displaystyle\int_{\mathrm{U}} f(x)\,\chi_l(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{V}} g(x)\,\chi_l(x)\,\mathrm{d}x, & \text{per} \quad \varphi_h \subset \{\chi\}. \end{cases}$$

Se è

$$\int_{\mathrm{U}} f(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\text{per } k = 1, 2, \cdots),$$

risulterà, in virtù delle ipotesi,

$$\int_{\mathrm{T}} \Phi(x)\,\varphi_h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\text{per } h = 1, 2, \cdots),$$

e quindi, per la supposta completezza della successione $\{\varphi\}$, $\Phi(x)$, è quasi ovunque nulla in T e pertanto anche in U, ma in U è $\Phi(x) = f(x)$.

Esempi. Designi x la variabile reale. Alla successione

(10) $$\{\varphi\} \equiv 1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \cdots,$$

completa nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ dell'asse x, sono subordinate le successioni

(11) $$\{\psi\} \equiv \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \cdots,$$

(12) $$\{\chi\} \equiv 1, \cos x, \cos 2x, \cdots,$$

in essa mutuamente complementari. Com'è ben noto, dagli elementi, tali successioni sono entrambe complete nell'intervallo $(0, \pi)$. Ebbene, ciò segue immediatamente, per il teorema dimostrato, dalla completezza nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ della successione (10). Basta sostituirvi gli insiemi U e V, rispettivamente, con gl'intervalli $(0, \pi)$ e $(-\pi, 0)$ e l'insieme T con l'intervallo $(-\pi, \pi)$. Per dimostrare la completezza della successione (11) nell'intervallo $(0, \pi)$ basta porre, nell'intervallo $(-\pi, 0)$

$$g(x) = -f(-x),$$

e per dimostrare quella della successione (12)

$$g(x) = f(-x).$$

Così, nell'intervallo $(-a\,,\,a)$, a indicando un numero reale, è completa la successione

$$\{x^h\} \qquad (h = 0\,,\,1\,,\cdots),$$

e nell'intervallo $(0\,,\,a)$ sono complete entrambe le successioni

$$\{x^{2k+1}\}\;,\;\{x^{2k}\} \qquad (k = 0\,,\,1\,,\cdots),$$

a quella subordinate e in essa complementari, laddove esse, com'è subito visto, non sono complete in ogni intervallo (a', a), per il quale sia $a'\,a < 0$.