Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guido Zappa

Sulla varietà generata da certi gruppi risolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.6, p. 642–645.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_6_642_0>

Algebra. — *Sulla varietà generata da certi gruppi risolubili* (*). Nota (**) del Corrisp. GUIDO ZAPPA.

SUMMARY. — A finite basis is given for the laws of the variety generated by the groups G such that: (1) G is finite; (2) the exponent of G divides the odd integer n; (3) the orders of the principal factors of G are primes or squares of primes.

In una mia precedente Nota ([3]) ho determinato un insieme finito di leggi atto a definire la varietà generata dai gruppi finiti supersolubili il cui esponente divida un intero assegnato n. I gruppi finiti d'ordine dispari in cui ogni fattore principale ha ordine primo o quadrato di un primo si comportano, sotto diversi aspetti, in modo non dissimile dai gruppi finiti supersolubili. Era quindi da ritenere che si potesse determinare un insieme finito di leggi anche per la varietà V generata dai gruppi finiti il cui esponente divide un intero n dispari e i cui fattori principali hanno ordine primo o quadrato di un primo. Ciò è fatto nella presente Nota: le leggi cercate sono quelle indicate con (1), (2), (3), (4) nel Teorema 3.1. Ci si è basati, come nella Nota [3], sul lavoro [1] di Baer. Sarebbe interessante vedere se le leggi (4) sono conseguenza delle (1), (2), (3).

1. Proviamo anzitutto il Teorema seguente:

1.1. *Sia* G *un gruppo finito d'ordine dispari, i cui fattori principali abbiano tutti ordine primo o quadrato di un numero primo. Allora*:

a) G *è disperso*,

b) *Il gruppo di automorfismi indotto da* F *in un suo fattore principale d'ordine* p^i ($i = 1, 2$; p *primo*) *è ciclico e il suo ordine divide* $p^2 - 1$.

La dimostrazione del punto a) si basa sul fatto che il gruppo d'automorfismi A di un fattore principale di G d'ordine p ha ordine $p - 1$, mentre quello di un fattore principale d'ordine p^2 ha ordine $(p^2 - 1)(p^2 - p)$. In ambo i casi, i fattori primi dell'ordine di A sono, nelle nostre ipotesi, $\leq p$. Basta quindi ripetere il ragionamento atto a provare che ogni gruppo finito supersolubile è disperso (vedi ad esempio [2], XI.10.4).

La dimostrazione del punto b) segue invece la linea seguente. Applicando un procedimento di induzione, e tenuto conto del punto a), ci si può ridurre al caso in cui il fattore principale considerato sia un sottogruppo normale M d'ordine p^i ($i = 1, 2$) ove p è il più grande divisore primo dell'ordine di G. Allora M è contenuto in un p–sottogruppo di Sylow P di G, necessariamente normale in G perché G è disperso. Ne segue che M ha intersezione non vuota

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca «Strutture algebriche e geometriche e applicazioni» del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 18 giugno 1971.

col centro Z di P, onde $Z \cap M$ è un sottogruppo normale di G diverso dall'unità. Essendo M normale minimo in G, si ha $M \leq Z$, onde il centralizzante di M in G contiene P. Ne segue che l'ordine del gruppo Γ di automorfismi indotto in M da G è primo con p, e quindi divide $p - 1$ se $i = 1$, mentre divide $(p-1)^2(p+1)$ se $i = 2$. Nel primo caso, inoltre, Γ è ciclico, onde si ha la b); nel secondo, detto C il centro di Γ, si ha che Γ/C, avendo ordine dispari, è isomorfo ad un sottogruppo di PSL $(2, p)$, e quindi il suo ordine, essendo primo con p, divide $\frac{1}{2}(p-1)(p+1)$. Ma Γ/C è risolubile, perché tale è G, e i soli sottogruppi risolubili d'ordine dispari e primo con p di PSL $(2, p)$ sono ciclici e il loro ordine divide $p+1$ o $p-1$. Ne segue che Γ/C è ciclico e che il suo ordine divide $\frac{p-1}{2}$ o $\frac{p+1}{2}$. Se però l'ordine di Γ/C dividesse $\frac{p-1}{2}$, $\frac{\Gamma}{C}$ lascerebbe fermo almeno un sottogruppo d'ordine p di M, il che non può essere, essendo M normale minimo in G. Pertanto l'ordine di Γ/C divide $\frac{p+1}{2}$. D'altra parte C è ciclico, e il suo ordine divide $p - 1$. Essendo C e Γ/C ciclici, Γ è generato da due elementi di cui uno nel centro C, e pertanto Γ è abeliano. Essendo i fattori primi dispari di $p - 1$ diversi da quelli di $p + 1$, Γ è ciclico e il suo ordine divide $\frac{1}{2}(p^2 - 1)$, quindi anche $p^2 - 1$, onde vale la b).

Poiché ogni elemento di G induce in ogni fattore principale di G un gruppo ciclico, quindi abeliano, di automorfismi, si ha che ogni elemento di G' induce in ogni fattore principale di G l'automorfismo identico. Si consideri ora una serie principale Σ di G passante per G', e siano H e K due sottogruppi consecutivi appartenenti a Σ, contenuti in G'. Allora H/K è nel centro di G/K, onde i sottogruppi appartenenti a Σ contenuti in G' formano una serie centrale di G' terminante con l'unità. Ne segue che:

1.2. *Se* G *è un gruppo finito d'ordine dispari, i cui fattori principali abbiano ordine primo o quadrato di un numero primo, il derivato di* G *è nilpotente.*

2. Proviamo ora quanto segue:

2.1. *Sia* G *un gruppo finito d'ordine dispari tale che*:

1) G *è disperso.*

2) G' *è nilpotente,*

3) *Se p è un primo che divide l'ordine di* G, *è* $[x^{p^2-1}, y] = 1$ *per ogni p-elemento $y \in G'$ e ogni $x \in G$ di periodo primo con p.*

Allora ogni fattore principale di G *ha ordine primo o quadrato di un numero primo.*

Si proceda per induzione rispetto all'ordine di G. Sia $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ l'ordine di G ($p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ numeri primi, $p_s > 2$). Per la 1), G ha un sottogruppo normale P_1 d'ordine $p_1^{r_1}$. È facile vedere che G/P_1 verifica anche esso le ipotesi 1), 2), 3), onde, per l'ipotesi di induzione, ogni fattore principale di G/P_1 ha ordine primo o quadrato di un primo. Considerata una serie principale Σ di G passante per P_1, si ha che ogni fattore principale H/K di Σ con $K \geq P_1$ è isomorfo ad un fattore principale $\frac{H/P_1}{K/P_1}$ di $\frac{G}{P_1}$ onde l'ordine di H/K è primo o quadrato di un primo. Basta quindi limitare l'esame ai fattori H/K di Σ con $P_1 \geq H$. Poiché inoltre $G' \cap P_1$ è normale in G, possiamo supporre Σ passante per $G' \cap P_1$. Proviamo ora che:

I) G induce in H/K ($P_1 \geq H$) un gruppo abeliano d'automorfismi. Dobbiamo distinguere due casi:

a) Sia $G' \cap P_1 \geq H$. Sia $g \in G'$. Essendo P_1 il p_1–sottogruppo normale di G, $G' \cap P_1$ è l'unico p_1–sottogruppo normale di G', onde $g = g_1 g_2$ con $g_1 \in G' \cap P_1$, $g_2 \in G'$ e di periodo primo con p_1. Ma, essendo G' nilpotente, quindi prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, g_2 è nel centralizzante di $G' \cap P_1$, quindi induce in H/K l'automorfismo identico; inoltre, detto Z/K il centro di P_1/K, si ha che $Z/K \cap H/K \neq 1$ perché H/K è normale in P_1/K, ed inoltre Z/K è caratteristico in P_1/K, quindi normale in G/K, onde anche $Z/K \cap H/K$ è normale in G/K. Essendo H/K normale minimo in G/K, si ha $Z/K \geq H/K$, onde P_1/K è nel centralizzante di H/K, e pertanto g_1 induce in H/K l'automorfismo identico. Ne segue che anche $g = g_1 g_2$ induce in H/K l'automorfismo identico, cioè è nel centralizzante C di H/K. Si ha pertanto $G' \leq C$, onde G/C è abeliano; ma il gruppo degli automorfismi indotto da G in H/K è isomorfo a G/C, quindi è anch'esso abeliano, cioè vale la I).

b) Sia $K \geq G' \cap P_1$. Sia $g \in G'$. Sarà come nel caso *a*), $g = g_1 g_2$ con $g_1 \in G' \cap P_1$, $g_2 \in G'$ e di periodo primo con p_1, ed inoltre, sempre come nel caso *a*), g_2 induce in H/K l'automorfismo identico. Ma essendo $g_1 \in G' \cap \cap P_1 \leq K \leq H$, anche g_1 induce in H/K l'automorfismo identico, onde altrettanto fa $g = g_1 g_2$. Ragionando come nel caso *a*), si vede che, anche in questo caso, il gruppo degli automorfismi indotti da G in H/K è abeliano, cioè vale la I).

Proviamo ora che:

II) $[x^{p_1^2-1}, y] = 1$ per ogni p_1–elemento $y \in P_1 \cap G'$ e ogni elemento $x \in G$ tale che il periodo relativo di x rispetto al centralizzante D di $P_1 \cap G'$ sia primo con p_1.

Sarà $x = x_1 x_2$ con x_1 p_1–elemento e x_2 di periodo primo con p_1, e con x_1 e x_2 potenze di x, quindi tra loro permutabili. Il periodo relativo di x_1 rispetto a D deve essere primo con p_1; ma essendo x_1 un p_1–elemento, ciò può avvenire solo se $x_1 \in D$. Si avrà $x^{p_1^2-1} = x_1^{p_1^2-1} x_2^{p_1^2-1}$. Ma $x_1^{p_1^2-1}$ è in D al pari di x_1, quindi è permutabile con y. Inoltre, per l'ipotesi 3), anche $x_2^{p_1^2-1}$ è permutabile con y. Ne segue che $x^{p_1^2-1}$ è permutabile con y, cioè vale la II).

In base al Teorema 5.3 di Baer [1], ogni fattore principale di G contenuto in P_1 ha ordine p_1 o p_1^2, come si voleva.

3. Possiamo ora giungere al risultato conclusivo:

3.1. *Sia* V *la varietà generata dai gruppi finiti il cui esponente divida* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ $(p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ primi dispari), *e i cui fattori principali* *abbiano tutti ordine primo o quadrato di un numero primo. Allora V è definita dalle seguenti leggi*:

$$(1)\ x_1^n; \qquad (2)\ (x_1^{n/m_i} x_2^{n/m_i})^{m_i}; \qquad (3)\ [[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, x_3^{p_i^{a_i}(p_i^2-1)}] \qquad (i=1,\cdots,r);$$

$$(4)\qquad [[x_1, x_2]^{np_i^{-a_i}}, [x_3, x_4]^{np_j^{-a_j}}] \qquad (i=1,\cdots,r-1\ ;\ j=i+1,\cdots,r)$$

ove si sia posto $m_i = p_1^{a_1}\cdots p_i^{a_i}$ $(i=1,\cdots,r)$.

Sia A l'insieme dei gruppi finiti di cui all'enunciato. Proviamo che in ogni gruppo appartenente ad A valgono le leggi (1), (2), (3) e (4).

La (1) vale in ogni gruppo $\in$A, poiché l'esponente di un tale gruppo divide n. Inoltre, in base al Teorema 1.1, ogni gruppo $\in$A è disperso, e quindi in esso il prodotto di due elementi il cui periodo divide m_i è ancora un elemento il cui periodo divide m_i, onde in esso valgono le (2) per $i=1,\cdots,r$. Si osservi poi che ogni gruppo G $\in$ A è risolubile, e che, in base al Teorema 1.1, il gruppo di automorfismi indotto da G in un suo fattore principale d'ordine p_i o p_i^2 è ciclico e il suo ordine divide p_i^2-1, onde per G vale la (iii) del teorema 5.3 di Baer [1] per N = G. Poiché, in base a detto Teorema la (iii) è equivalente alla (ii) del teorema stesso, in G è $[x^{p_i^2-1}, y]=1$ per ogni p_i–elemento $y \in$ G$'$ e ogni elemento $x \in$ G di periodo primo con p_i. Dato che se $g_1, g_2 \in$ G, $[g_1, g_2]^{np_i^{-a_i}}$ è un p_i–elemento di G$'$ mentre $g_1^{p_i^{a_i}}$ è un elemento di G di periodo primo con p_i, in G valgono le (3) per $i=1,\cdots,r$. Infine, in base al Teorema 1.2, il derivato di G è nilpotente, onde, se $i \neq j$, ogni p_i–elemento di G$'$ è permutabile con ogni p_j–elemento di G$'$, e quindi in G valgono le (4). Essendo V generata da A, le (1), (2), (3), (4) sono leggi in V.

Viceversa, sia G un gruppo finito in cui valgano le leggi (1), (2), (3), (4). Valendo in G le (1) l'esponente di G divide n, e valendo in esso anche le (2), G è disperso. In base ai Teoremi 3.4 e 3.1 della Nota [2] ogni p_i–elemento di G$'$ appartiene al sottogruppo generato dagli elementi della forma $[g_1, g_2]^{np_i^{-a_i}}$ con $g_1, g_2 \in$ G. Valendo in G le (3), ogni p_i–elemento di G$'$ è quindi permutabile con la potenza p_i^2-1 di ogni elemento di G di periodo primo con p_i; e valendo le (4), per $i \neq j$ ogni p_i–elemento di G$'$ è permutabile con ogni p_j–elemento di G$'$. In base al Teorema 2.1, ogni fattore principale di G ha ordine primo o quadrato di un numero primo, onde G $\in$ V.

Concludendo, un gruppo finito appartiene a V se e solo se verifica le (1), (2), (3), (4). Poiché V è generata dai suoi gruppi finiti, si ha che V è definita dalle leggi (1), (2), (3), (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Principal factors, maximal subgroups and conditional identities of finite groups*, « Illinois Journ. of Math. », *13*, 1–52 (1969).

[2] G. ZAPPA, *Fondamenti di teoria dei gruppi*, II, Roma, 1970.

[3] G. ZAPPA, *Su alcune varietà generate da gruppi supersolubili*, « Le Matematiche », *25* (1970).