Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Radu Bădescu

Un problème de calcul variationnel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.5, p. 562–567.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_5_562_0>

Meccanica. — *Un problème de calcul variationnel.* Nota di RADU BĂDESCU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — In questo studio si tratta di trovare un arco di curva OM_0 (di curvatura $1/\rho \neq 0$) sul quale un punto materiale M si muove con attrito da M_0 verso l'origine sotto l'azione di un campo di forze $\overline{F}(M)$ dipendenti dalla posizione di M in un tempo minimo T. Le quattro condizioni necessarie e sufficienti di Euler, Weierstrass, Lagrange, e Jacobi essendo soddisfatte, esiste un minimo relativo (nel senso forte) del funzionale $T(y)$ che dà il valore T. In particolare, nel caso del campo gravitazionale costante, l'estremale cercata è una cicloide. Si osserva che la condizione di Jacobi corrisponde ad una equazione di Riccati e il suo integrale-generale permette d'affermare che non esistono dei punti coniugati ai punti M_0 e O, dunque nel campo della estremale del problema posto è raggiunto il minimo relativo T.

Un important problème pour les triages des stations férroviaires se pose dès l'on veut effectuer le tri des wagons dans le plus court intervalle de temps possible. C'est là un problème du calcul des variations qui peut conduire à des généralisations étendues si l'on tient compte des intéressantes recherches dûes à M. l'Acad. Mauro Picone dans le même domaine [1].

Avec la collaboration de L. Cristian, nous avons récemment publié une étude [2] du mouvement tautochrone plan pour un point matériel qui se déplace (en tenant compte du frottement) sur une courbe C et dans un champ de forces dépendant seulement de la position du point. Nos résultats conduisaient à une intégrale généralisée qui devait être divergente pour assurer l'existence des courbes C, aussi dans le cas du temps T infini.

Le problème étudié ici conduit à un exemple simple du calcul des variations pour lequel les quatre conditions bien connues d'existence du minimum au sens fort peuvent être facilement réalisées. En particulier, les conditions de Weierstrass, de Legendre et même celle de Jacobi – qui conduit à une équation de Riccati intégrable – permettent d'illustrer dans un cas assez général pour le champ des forces, la solution du problème variationnel envisagé.

a) Considérons l'espace des fonctions vectorielles réelles $\mathcal{E}$

$$\bar{r}(s) = \bar{\imath}\int_0^s \cos\theta\cdot ds + \bar{\jmath}\int_0^s \sin\theta\cdot ds\,, \tag{1}$$

avec $\theta(s) \in C^2[0, a] = C^2(\bar{J}) \to R$ ($s = \text{arc OM}$), dont les graphiques sont des arcs C à courbure non nulle $\forall s \in \bar{J}$, avec la norme des fonctions continues. θ est ici l'angle de la tangente avec Ox.

b) Envisageons un champ de forces réelles $\overline{F}(\bar{r}) \in C^1\{\forall M \in \overline{D}\,;\ s \in \bar{J}\}$ qui dépendent de la position du point M dans le domaine simplement

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1971.

connexe $\bar{D} \subset R^2$, domaine contenant la famille C. Sur chaque courbe C on aura

$$\bar{F} = \bar{\tau}\, F_t + \bar{\nu}\, F_n \tag{2}$$

les verseurs $\bar{\tau}$ et $\bar{\nu}$ étant dirigés dans le sens des arcs croissants sur la tangente, et vers la concavité de la courbe pour la normale; $F_t(s)$, $F_n(s) \in C^1(\bar{J}) \to R$.

c) Le frottement du point matériel M sur C sera défini dans son déplacement par $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, et la réaction de C aura alors l'expression

$$\bar{R} = (\mu\bar{\tau} + \bar{\nu}) \cdot R, \tag{3}$$

où R est la valeur algébrique de $\bar{R}$.

Le modèle mathématique du mouvement de M *sur* C *à partir d'une position fixe* $M_0(s_0) \in C$, *avec la vitesse initiale* $\bar{v}_0 = v_0\, \bar{\tau}\, (v_0 < 0)$, *se rapporte à la détermination de la courbe* $C \in \mathcal{C}$ *de manière que le point matériel* M *arrive en* O $(s = 0)$ *dans un minimum de temps* T *sous l'action du champ* $\bar{F}$ $(0 < s_0 \leq a)$.

L'équation vectorielle du mouvement

$$m \cdot \ddot{\bar{r}} = \bar{F} + (\mu\bar{\tau} + \bar{\nu}) \cdot R = m \cdot \dot{v}\, \bar{\tau} + m \cdot v \cdot \dot{\theta}\bar{\nu} \tag{4}$$

permet l'élimination de R

$$\dot{v} - \mu \cdot v \cdot \dot{\theta} = -\frac{1}{m}(F_t - \mu F_n) = \mathcal{F}(s) \tag{5}$$

la fonction $\mathcal{F}(s)$ étant définie sur $\bar{D}$ par les hypothèses *b*) et *c*).

On obtient une intégrale première de (5) en utilisant la méthode de Lagrange si l'on pose $v = \frac{ds}{dt} = U \cdot e^{\mu\theta}$, et l'on trouve

$$U \cdot dU = \mathcal{F} e^{-2\mu\theta} \quad , \quad U^2 - U_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} \mathcal{F} e^{-2\mu\theta}\, ds \quad , \quad U_0^2 = v_0^2\, e^{-2\mu\theta(s_0)}. \tag{6}$$

Comme $\mathcal{F}$ doit être négative pour que le déplacement de M se fasse vers O (1), on a

$$e^{-\mu\theta} = \sqrt{\frac{U}{\mathcal{F}} \cdot \frac{dU}{ds}} \quad , \quad dt = \frac{e^{-\mu\theta} \cdot ds}{U} = -\frac{ds}{(\sqrt{-U})^2} \cdot \sqrt{\frac{-U \cdot dU}{-\mathcal{F}\, ds}} \tag{7}$$

et le temps T dans lequel M décrit l'arc $M_0 O$ est donné par l'expression

$$T = -\int_{s_0}^{0} \sqrt{\frac{dU/ds}{U \cdot \mathcal{F}}}\, ds = \int_{s_0}^{0} f\left(s, U, \frac{dU}{ds}\right) \cdot ds \tag{8}$$

qui est une fonctionnelle définie par *a*), *b*), *c*) et (6), (8), dans l'espace $\mathcal{C}$.

(1) $U > U_0$, $\forall s \in (0, s]$, donc $dU/ds > 0$, d'où résulte que $U < 0$ et $\mathcal{F} < 0$, $\mathcal{F}$ ne pouvant être nul en O. Les régions du plan xOy où ces conditions ne sont pas remplies seront exclues du domaine $\bar{D}$ où sont définies les courbes $C \in \mathcal{C}$.

II. – Les conditions suffisantes pour l'existence d'un minimum relatif pour T

La fonctionelle T (U) *admet un minimum relatif* (*au sens fort*) *dans* $\mathcal{E}$ *si*:

α) la fonction réelle $U(s) \in C^1 [o, s_0]$ est une extrémale, solution de l'équation de Euler,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} = \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial U'}\right] \quad , \quad \Phi = f(s, U, U') \tag{9}$$

vérifiant les conditions bilocales $U_1 = U(s_0)$, $U_2^2 = U^2(o) = U_0^2 + 2 \int_s^0 \mathcal{F} e^{-2\mu\theta} \, ds$.

β) Elle vérifie la condition de Legendre (au sens fort) $\forall s \in [o, s_0]$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial U'^2} > o . \tag{10}$$

γ) Elle remplit la condition de Weierstrass relative à l'expression

$$\begin{aligned} E(s, U, W, Y) = f(s, U, Y) - f(s, U, W) - \\ - (Y - W) \cdot f'_{U'}(s, U, W) = o \end{aligned} \tag{11}$$

qui ne doit pas être négative pour tout arc $y = Y(s)$ de $\mathcal{E}$ appartenant à un voisinage V_ε d'ordre zéro de l'extrémale C qui passe, ainsi que les arcs mentionnés, par les points $M_1(s_0, U_1)$ et $M_2(o, U_2)$, avec $U(s_0) = U_1 = U_0$ [formule (6)] (2).

δ) Elle satisfait la condition de Jacobi relative à la courbe intégrale $\Gamma(y = Y(s) \in \mathcal{E})$ de l'équation différentielle attachée à la fonctionnelle (8)

$$\left(f_{U^2} - \frac{d}{ds} f_{UU'}\right) Y - \frac{d}{ds}(f_{U'^2} \cdot Y') = o \tag{12}$$

qui, partant du point $M_1(s_0, O)$, ne doit intersecter l'axe Os quand s varie de s_0 à O.

Dans toutes ces conditions, toute courbe de $\mathcal{E}$ définie par $y = y(s)$ de la classe $C^1 [o, s_0] \to R$ vérifiant les conditions bilocales α) et appartenant au voisinage V_ε de U (s)

$$V_\varepsilon(U) = \{ y(s) \mid \| y(s) - U(s) \| < \varepsilon , \forall s \in [o, s_0] \} \tag{13}$$

considéré au γ), vérifie l'inégalité

$$T(y(s)) \geq T(U(s)) \tag{14}$$

pourvu que U remplisse les quatre conditions α), β), γ), δ). L'extrémale U est ainsi plongée dans un champ d'extrémales et il existe un $\varepsilon > o$ et le voisinage V_ε de U tels que U réalise le minimum de T(U) au sens fort dans V_ε.

(2) W est ici la *fonction de pente* de Weierstrass.

Pour déterminer les extrémales U (s), il faut d'abord examiner les conditions mentionnées plus haut:

α) L'équation de Euler (9), où $f^2(s, \mathrm{U}, \mathrm{U}') = \mathrm{U}'\,\mathrm{U}^{-1}\,\mathfrak{F}^{-1}$, peut s'écrire

$$\frac{f'}{f} + \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}} = 0 \tag{15}$$

car $f_{\mathrm{U}'} = \dfrac{\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathfrak{F}^{-1}}{2f}$, $f_{\mathrm{U}} = -\dfrac{\mathrm{U}^{-2}\cdot\mathrm{U}'\cdot\mathfrak{F}^{-1}}{2f}$, et l'on déduit d'après (6) et (7)

$$f = \frac{\mathrm{C}}{\mathfrak{F}} \quad , \quad \mathrm{UU}' = \frac{\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{U}^2}{\mathfrak{F}} \quad , \quad \mathrm{U}^2 = \frac{\mathfrak{F}^2}{\mathrm{C}^2}\, e^{-2\mu s} = \mathrm{U}_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} \mathfrak{F} e^{-2\mu s}\, ds \tag{16}$$

d'où par une dérivation on trouve la condition

$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds} - \mu\mathfrak{F}\frac{d\theta}{ds} - \mathrm{C}^2 = 0 \;,\; \mathrm{U} = v\cdot e^{-\mu\theta} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{C}}\, e^{-\mu\theta} \;,\; \frac{v\,(s_0)}{\mathfrak{F}(s_0)} = \frac{v\,(\mathrm{O})}{\mathfrak{F}\,(\mathrm{O})} = \frac{1}{\mathrm{C}} \tag{17}$$

et, comme $\mathrm{C} \neq 0$ doit être fini, il résulte que la vitesse initiale v_0 ainsi que la vitesse finale ne peuvent être nulles. On déduit ensuite

$$\mathrm{T} = \mathrm{C}\int_{s_0}^{0} \frac{ds}{\mathfrak{F}\,(s)} > 0\,, \tag{18}$$

et la trajectoire (1) en remplaçant ds en fonction de $d\theta$

$$\bar{r} = \frac{1}{\mathrm{C}^2}\left[\int_{\theta(s)}^{\theta(s_0)} (\bar{\imath}\cdot\cos\theta + \bar{\jmath}\cdot\sin\theta)\cdot\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\theta} - \mu\cdot\mathfrak{F}\right)\cdot d\theta\right]\,. \tag{19}$$

qui définit l'extrémale cherchée.

β) La condition (10) est réalisée car $f_{\mathrm{U}'^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{(\mathrm{U}')^3\cdot\mathrm{U}\cdot\mathfrak{F}}} > 0$.

γ) La condition de Weierstrass (11) est aussi satisfaite car, désignant par W la pente de l'arc $y = \mathrm{Y}(s)$, on a, si $f(s, \mathrm{U}, \mathrm{U}') = -\sqrt{\dfrac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}\cdot\mathfrak{F}}}$,

$$\mathrm{E}\,(s, \mathrm{U}, \mathrm{W}, \mathrm{Y}) = -\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}\cdot\mathfrak{F}}} + \sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}\cdot\mathfrak{F}}} + (\mathrm{Y} - \mathrm{W})\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{U}\cdot\mathrm{W}\cdot\mathfrak{F}}} \geq 0$$

ce qui s'écrit $\mathrm{W} + \mathrm{Y} = 2\sqrt{\mathrm{WY}}$ ou bien $(\mathrm{W} - \mathrm{Y})^2 \geq 0$.

δ) L'équation différentielle de Jacobi (12) s'écrit

$$\mathfrak{F}^2\cdot\mathrm{Y}'' - (2\,\mathrm{C}^2 - \mathfrak{F}')\,\mathfrak{F}\mathrm{Y}' + \mathrm{C}^4\cdot\mathrm{Y} = 0 \tag{20}$$

et par le changement $\mathrm{Y}' = \eta\mathrm{Y}$, on trouve l'équation de Riccati

$$\mathfrak{F}^2\,\eta' + \mathfrak{F}^2\,\eta^2 - (2\,\mathrm{C}^2 - \mathfrak{F}')\,\mathfrak{F}\eta + \mathrm{C}^4 = 0 \tag{21}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante si l'on pose $y = \eta\mathfrak{F}$,

$$y\,\frac{d}{ds}(\ln y) + \mathfrak{F}^{-1}\,(y - \mathrm{C}^2)^2 = 0\,,$$

ou bien

$$\frac{dy}{ds} + \mathfrak{F}^{-1}(y - C^2)^2 = 0 .$$

La séparation des variables conduit, après une intégration, à la fonction

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{y}{\mathfrak{F}} = \left[1 + \frac{1}{C_1 + \int_{s_0}^{s} C^2 \cdot \frac{ds}{\mathfrak{F}}} \right] \frac{C^2}{\mathfrak{F}} \tag{22}$$

la constante d'intégration étant C_1/C^2, et, après une seconde intégration,

$$Y = Y_0 \exp \left[\int_{s_0}^{s} C^2 \frac{ds}{\mathfrak{F}} \right] \cdot \exp \left[\int_{s_0}^{s} \frac{C^2}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{ds}{C_1 + \int_{s_0}^{s} C^2 \cdot \frac{ds}{\mathfrak{F}}} \right] . \tag{23}$$

Or, dans le voisinage $V_\varepsilon(U)$, on doit avoir $\operatorname{sgn} \frac{U'}{U} = \operatorname{sgn} \frac{Y'}{Y}$, signes qui sont négatifs comme ceux de U et de $\mathfrak{F}$. Il résulte que le dernier rapport de (22) $1 \Big/ \left(C_1 + \int_{s_0}^{s} C^2 \frac{ds}{\mathfrak{F}} \right)$, doit, d'après la séparation en deux exponentielles de (23), garder le même signe + pour tout $s \in [0 , a]$, donc C_1 doit être strictement positif. Dans ces conditions la fonction $Y(s)$ ne s'annule pour aucune valeur de $s \in [0 , a]$ d'où l'on déduit qu'il n'y a pas de points conjugués à tout $s_0 \in [0 , a]$ dans cet intervalle $[0 , a]$. On pourrait discuter aussi le cas de $C_1 \leq 0$ pour déterminer la valeur maximum de a, ce que nous ferons dans un autre travail, l'intégrale qui figure dans la seconde exponentielle de (23) n'ayant pas de sens pour tout champ $\overline{F}(s)$ dans les conditions fixées au point b).

Il résulte de toute cette analyse que la *valeur* (18) *de la fonctionnelle* (8) *est un minimum* (*au sens fort*) *pour toutes les extrémales appartenant au voisinage* $V_\varepsilon \subset \overline{D}$, et elle correspond à la courbe extrémale définie par (19), une fois qu'on connaît les valeurs $\theta(s_0)$ et $\theta(0)$, avec les conditions supplémentaires (17).

Pour le champ gravitationnel constant $\overline{F} = -mg \cdot \overline{J}$, $F_t = -mg \cdot \sin\theta$, $F_n = mg \cdot \cos\theta$, $\mathfrak{F} = -\frac{g}{\cos\varphi} \sin(\theta - \varphi)$, $\frac{d\mathfrak{F}}{d\theta} - \mu\mathfrak{F} = -g \frac{\cos\theta}{\cos^2\varphi}$, et l'on a la représentation paramétrique de l'extrémale (19)

$$\begin{aligned} x(\theta) &= h(2\theta - 2\theta_0 + \sin 2\theta - \sin 2\theta_0) \\ y(\theta) &= h(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) \end{aligned} \qquad h = -\frac{g}{(2C \cdot \cos\varphi)^2} , \quad \theta_0 = \theta(0) , \tag{24}$$

avec $\theta_0 \in \left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$. C'est une cycloide convexe vers Oy positif dont la tangente en O fait l'angle θ_0 avec la direction positive de l'axe Ox.

ANNEXE DES CALCULS

L'équation différentielle de Jacobi est, d'après (12)

$$\left(P - \frac{d}{ds}Q\right)\cdot Y - \frac{d}{ds}(R \cdot Y') = 0 \tag{25}$$

où $P = f_{U^2}$, $Q = f_{UU'}$, $R = f_{U'^2}$ et $Y = Y(s)$ représente une courbe de $\mathcal{E}$ reliant M_0 à O mais appartenant à $V_\varepsilon(U)$. Comme $f^2 = U'/U$, $f_U = \frac{1}{2}U'/U^3$, avec

$$f = -\sqrt{U'/U\cdot\mathfrak{F}}\ ,\quad 2f_{U'} = -\frac{1}{\sqrt{U'\cdot U\cdot\mathfrak{F}}}\ ,$$

on trouve

$$\frac{4}{3}P = -\sqrt{\frac{U'}{U^5\cdot\mathfrak{F}}}\ ,\quad 4Q = \frac{1}{\sqrt{U^3\cdot U'\cdot\mathfrak{F}}}\ ,\quad 4R = \frac{1}{\sqrt{U'^3\cdot U\cdot\mathfrak{F}}}$$

et (25) s'écrit

$$2\frac{d}{ds}\left(Y'\cdot\frac{1}{\sqrt{U\cdot U'^3\cdot\mathfrak{F}}}\right) + Y\left[3\sqrt{\frac{U'}{U^5\cdot\mathfrak{F}}} + \frac{1}{\sqrt{U^3}}\left(-\frac{U''}{\sqrt{U'^3\cdot\mathfrak{F}}} - \frac{\mathfrak{F}'}{\sqrt{U'\cdot\mathfrak{F}^3}}\right)\right] = 0. \tag{26}$$

Comme $\ln(-f) = \frac{1}{2}(\ln U' - \ln|U| - \ln|\mathfrak{F}|)$, on trouve que la première condition (15) a la forme

$$\frac{U''}{U'} - \frac{U'}{U} + \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}} = 0 \tag{27}$$

et alors l'équation (26) devient, après une multiplication par $\sqrt{U'^5\cdot U^5\,\mathfrak{F}^3}$,

$$2\,Y''\cdot U'\,U^2\cdot\mathfrak{F} - Y'(3\,U''\cdot U^2\,\mathfrak{F} + U'^2\cdot U\cdot\mathfrak{F} + \mathfrak{F}'\,U'\cdot U^2) +$$
$$+\,Y(3\,U'^3\,\mathfrak{F} - UU''\,U'\,\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'\cdot U\cdot U'^2) = 0\,.$$

Tenant ensuite compte de (27) et de (16) avec $U' = C^2\,U/\mathfrak{F}$, ce qui permet l'élimination de U' et U, on trouve l'équation (20).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAURO PICONE, *Un espressivo semplice esempio di non esistenza del minimo*, « Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées », T. IX, No. 2 (1964). Académie de la R. S. România, Bucarest.

[2] RADU BĂDESCU și LIVIU CRISTIAN, *Asupra unor mișcări plane cu frecare*. « Buletinul științific al Institutului politehnic din Cluj » (1968), T. 11, No. 2, Cluj. R. S. România.