
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ELISA UDESCHINI BRINIS

**Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e
spinoriali. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.5, p. 555–561.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_5_555_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e spinoriali.* Nota II (*) di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In the flat space-time referred to Galileian coordinates, we derive—in this second paper—the expression of the total energy-momentum spinor, and connected conservation laws in spinor form, for a field defined by a second-rank symmetric spinor and by its complex conjugate. In particular, for the free electromagnetic field in vacuo, we get the energy-momentum spinor expressed by the two parts of the electromagnetic spinor depending on the hermitian part and on the anti-hermitian one of the potential spinor.

3. CAMPI SPINORIALI: SPINORE ENERGETICO TOTALE

Facendo seguito alla Nota I (***), della quale proseguo la numerazione dei paragrafi e delle formule, si consideri nello spazio-tempo pseudoeuclideo, riferito a coordinate pseudocartesiane, di metrica (1-1), un campo fisico caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} ($A, B \dots = 1, 2$) e dal suo complesso coniugato $\bar{\Phi}_{AB} \equiv \Phi_{AB}$ (****).

Come ho detto nell'introduzione, sfruttando l'invarianza dell'azione rispetto alle trasformazioni spinoriali subordinate nello spazio di spin dalle trasformazioni infinitesime di Lorentz, stabilisco per tale campo le leggi di conservazione in forma spinoriale e ottengo l'espressione dello spinore energetico totale a divergenza spinoriale nulla.

Sia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_{AB}, \bar{\Phi}_{AB})$ la densità lagrangiana del campo e χ_{RS} lo spinore potenziale dal quale si può far dipendere lo spinore Φ_{AB} , mediante la (16):

$$(3-1) \quad \Phi_{AB} = \frac{i}{8} (\chi_{RA}/R_B + \chi_{RB}/R_A).$$

Non si altera il campo Φ_{AB} eseguendo sullo spinore potenziale la trasformazione di gauge:

$$(3-2) \quad \chi'_{RS} = \chi_{RS} + \gamma_{RS}$$

con $\gamma(x)$ funzione scalare complessa arbitraria, disponendo della quale si può imporre al potenziale χ_{RS} la condizione di solenoidalità: $\chi_{RS}/R^S = 0$.

Dal principio variazionale $\delta A = 0$, in corrispondenza a variazioni arbitrarie dei potenziali $\chi_{RS}, \bar{\chi}_{RS}$ (0, indifferentemente, a variazioni arbitrarie

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1971.

(***) Presentata nella seduta del 17 aprile 1971.

(****) Per ragioni tipografiche gli indici in grassetto sostituiscono gli indici puntati.

(16) E. UDESCHINI BRINIS, «Questi Rendic.», 40 (4), 577 (1966).

delle parti hermitiana $\varphi_{\mathbf{RS}}$ ed anti-hermitiana $\psi_{\mathbf{RS}}$ dello spinore $\chi_{\mathbf{RS}}$ ⁽¹⁷⁾ nulle al contorno della regione τ , si traggono le equazioni di campo.

Queste, introducendo per brevità di scrittura lo spinore doppio simmetrico $\theta^{\mathbf{AB}}$:

$$\theta^{\mathbf{AB}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{BA}}}$$

si scrivono:

$$(3-3) \quad \theta^{\mathbf{AB}}/\mathbf{C}_A = 0 \quad ; \quad \theta^{\mathbf{AB}}/\mathbf{A}^C = 0$$

e sono legate dalle due identità:

$$(3-4) \quad \theta^{\mathbf{AB}}/\mathbf{A}^C \mathbf{C}_B \equiv 0 \quad ; \quad \theta^{\mathbf{AB}}/\mathbf{A}^C \mathbf{B}_C \equiv 0.$$

Le identità (3-4) discendono direttamente dall'invarianza dell'azione rispetto alle trasformazioni (3-2) e cioè dall'essere $\delta A \equiv 0$ in corrispondenza a variazioni arbitrarie dei potenziali, nulle al contorno, del tipo: $\delta \chi_{\mathbf{RS}} = \delta \gamma_{\mathbf{RS}}$; $\delta \bar{\chi}_{\mathbf{RS}} = \delta \bar{\gamma}_{\mathbf{RS}}$ (ossia: $\delta \varphi_{\mathbf{RS}} = \delta \alpha_{\mathbf{RS}}$; $\delta \psi_{\mathbf{RS}} = i \delta \beta_{\mathbf{RS}}$ essendo $\gamma \equiv \alpha + i\beta$, con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funzioni reali).

Per ottenere le leggi di conservazione in forma spinoriale e l'espressione dello spinore energetico totale, possiamo ancora valerci della relazione:

$$(3-5) \quad \int_{\tau} [\delta^* \mathcal{L} + (\mathcal{L} \delta x^\nu)_{/\nu}] dx \equiv 0$$

(nella quale $\delta^* \mathcal{L}$ è variazione sostanziale). Questa, posta in forma spinoriale e ammesse verificate le equazioni di campo (3-3), diventa:

$$(3-6) \quad \int_{\tau} \left\{ \frac{1}{8} [\theta^{\mathbf{AB}} (\delta^* \varphi_{\mathbf{CB}} + \delta^* \psi_{\mathbf{CB}})]/\mathbf{C}_A + \frac{1}{8} [\theta^{\mathbf{AB}} (\delta^* \varphi_{\mathbf{BC}} - \delta^* \psi_{\mathbf{BC}})]/\mathbf{A}^C + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{L} \xi^{\mathbf{CA}})_{/\mathbf{CA}} \right\} dx = 0$$

avendo indicato con $\xi^{\mathbf{CA}}$ lo spinore hermitiano corrispondente al vettore infinitesimo δx^α , secondo le: $\xi^{\mathbf{CA}} = g_{\alpha}^{\mathbf{CA}} \delta x^\alpha$; $\delta x^\alpha = \frac{1}{2} g_{\mathbf{CA}}^{\alpha} \xi^{\mathbf{CA}}$ (ove $g_{\alpha}^{\mathbf{CA}}$ è lo spin-tensore fondamentale).

Occorre pertanto procurarsi la variazione sostanziale $\delta^* \varphi_{\mathbf{CB}}$ dello spinore doppio $\varphi_{\mathbf{CB}}$ in corrispondenza ad una trasformazione infinitesima (1-10) di coordinate di Lorentz ⁽¹⁸⁾.

(17) E. UDESCHINI BRINIS, *loco citato*. E. UDESCHINI BRINIS, «Meccanica», I, II, 11 (1967).

Si ha: $\chi_{\mathbf{RS}} = \varphi_{\mathbf{RS}} + \psi_{\mathbf{RS}} \quad ; \quad \bar{\chi}_{\mathbf{RS}} = \varphi_{\mathbf{SR}} - \psi_{\mathbf{SR}}$.

(18) Nell'ambito della relatività ristretta, finchè si opera in coordinate pseudocartesiane e ci si limita a trasformazioni di Lorentz, anzichè lasciare indipendenti le trasformazioni di

Poichè: $\varphi^{\mathbf{RS}} = g_a^{\mathbf{RS}} \Phi^a$ (essendo Φ^a il vettore corrispondente a $\varphi^{\mathbf{RS}}$), dalle (1-13) ed (1-14), imponendo $\delta^* g_a^{\mathbf{RS}} \equiv \delta g_a^{\mathbf{RS}} \equiv 0$ segue:

$$(3-7) \quad \delta^* \varphi^{\mathbf{RS}} = \delta \varphi^{\mathbf{RS}} - \varphi^{\mathbf{RS}}_{/v} \delta x^v = \frac{1}{2} \xi^{\mathbf{RS}}_{/TU} \varphi^{\mathbf{TU}} - \frac{1}{2} \varphi^{\mathbf{RS}}_{/TU} \xi^{\mathbf{TU}}.$$

Si osservi che la variazione locale $\delta \varphi^{\mathbf{RS}}$ si può anche esprimere nella forma (19):

$$(3-8) \quad \delta \varphi^{\mathbf{RS}} = -\varphi^{\mathbf{TS}} \eta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{T}} - \varphi^{\mathbf{RU}} \eta^{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}}$$

con:

$$(3-9) \quad \eta_{\mathbf{AB}} = \eta_{\mathbf{BA}} = \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} g_{\mu\mathbf{CA}} g_{\nu\mathbf{B}}.$$

(essendo $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ i coefficienti della rotazione nella trasformazione infinitesima di Lorentz).

Tenendo conto che, per la (1-14):

$$(3-10) \quad \xi^{\mathbf{RH/TS}} + \xi^{\mathbf{TS/RH}} = 0$$

si può verificare che la (3-8) si accorda con la $\delta \varphi^{\mathbf{RS}} = \frac{1}{2} \xi^{\mathbf{RS}}_{/TU} \varphi^{\mathbf{TU}}$ contenuta nella (3-7) (20).

coordinate nello spazio-tempo e le trasformazioni spinoriali nello spazio di spin, tenendo conto delle une e delle altre attraverso la trasformazione subita dallo spin-tensore $g_{\mathbf{aRS}}$, si preferisce limitarsi ad un calcolo spinoriale più particolare, collegando ad ogni trasformazione di Lorentz una trasformazione unimodulare di spin tale che lo spin-tensore fondamentale $g_{\mathbf{aRS}}$ resti invariato e mantenga costantemente i valori:

$$\|g_0 \mathbf{RS}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|g_1 \mathbf{RS}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \|g_2 \mathbf{RS}\| = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}; \quad \|g_3 \mathbf{RS}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

B. L. VAN DER WAERDEN, « Nachr. Akad. Wiss. Göttingen », 100 (1929). W. L. BADE and HERBERT JEHLE, « Reviews of modern Physics », 25 (3), 714 (1953). E. M. CORSON, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equations*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow (1953).

(19) E. M. CORSON, *loco citato*.

(20) Si ha difatti:

$$\varphi^{\mathbf{TS}} \eta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{T}} = \frac{1}{4} \varphi^{\mathbf{TS}} \xi^{\mathbf{R}}_{\mathbf{H/T}}{}^{\mathbf{H}} = -\frac{1}{4} (\varphi^{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}} \xi^{\mathbf{RH/T}}{}^{\mathbf{S}} + \varphi^{\mathbf{TH}} \xi^{\mathbf{RS}}_{/\mathbf{TH}})$$

$$\varphi^{\mathbf{RU}} \eta^{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}} = \frac{1}{4} \varphi^{\mathbf{RU}} \xi^{\mathbf{S}}_{\mathbf{H/U}}{}^{\mathbf{H}} = -\frac{1}{4} (\varphi^{\mathbf{H}}_{\mathbf{U}} \xi^{\mathbf{HS/R}}{}^{\mathbf{U}} + \varphi^{\mathbf{HU}} \xi^{\mathbf{RS}}_{/\mathbf{HU}})$$

e quindi:

$$\varphi^{\mathbf{TS}} \eta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{T}} + \varphi^{\mathbf{RU}} \eta^{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}} = \frac{1}{4} \varphi_{\mathbf{TH}} (\xi^{\mathbf{RH/TS}} + \xi^{\mathbf{TS/RH}}) - \frac{1}{2} \varphi^{\mathbf{TH}} \xi^{\mathbf{RS}}_{/\mathbf{TH}}.$$

Si ha quindi, dalla (3-6), tenuto conto della (3-10):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{(\varphi_{RS} + \psi_{RS}) \xi^{RS}_{/CB} + (\varphi_{CB} + \psi_{CB})_{/RS} \xi^{RS}\}] /_A^C dx - \\ & -\frac{1}{16} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{(\varphi_{SR} - \psi_{SR}) \xi^{SR}_{/BC} + (\varphi_{BC} - \psi_{BC})_{/SR} \xi^{SR}\}] /_A^C dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathfrak{L} \xi^{CA})_{/CA} dx = 0. \end{aligned}$$

Osservando che le due espressioni

$$[\theta^{AB} (\varphi_{RS} + \psi_{RS}) \xi^{RS}] /_{CB}^{CA} \quad \text{e} \quad [\theta^{AB} (\varphi_{SR} - \psi_{SR}) \xi^{SR}] /_{BCA}^C$$

risultano identicamente nulle per la saturazione di due indici di simmetria con due di emisimmetria ⁽²¹⁾ e sfruttando le equazioni di campo (3-3) si ha poi:

$$\begin{aligned} (3-11) \quad & \frac{1}{16} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{(\varphi_{RS} + \psi_{RS})_{/CB} - (\varphi_{CB} + \psi_{CB})_{/RS}\} \xi^{RS}] /_A^C dx + \\ & + \frac{1}{16} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{(\varphi_{SR} - \psi_{SR})_{/BC} - (\varphi_{BC} - \psi_{BC})_{/SR}\} \xi^{SR}] /_A^C dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathfrak{L} \xi^{CA})_{/CA} dx = 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'identità ⁽²²⁾:

$$\begin{aligned} (3-12) \quad & (\varphi_{RS/CB} - \varphi_{CB/RS}) \xi^{RS} = \frac{1}{2} (\varphi_{RB}/_R^S + \varphi_{RS}/_R^B) \xi_C^S + \\ & + \frac{1}{2} (\varphi_{CS}/_R^S + \varphi_{RS}/_C^S) \xi_B^R \end{aligned}$$

(21) È infatti, nello spazio-tempo pseudoeuclideo:

$$[\dots] /_{CB}^C{}_A = [\dots] /_{ACB}^C = -[\dots] /_{CA}^C{}_B.$$

(22) Essendo:

$$(\varphi_{RS/CB} - \varphi_{CB/RS}) \xi^{RS} = -(\varphi_{CS}/_R^B - \varphi_{B/CS}^R) \xi_R^S - (\varphi_{S/RB}^R - \varphi_{RB/RS}^R) \xi_C^S$$

ed anche:

$$(\varphi_{RS/CB} - \varphi_{CB/RS}) \xi^{RS} = -(\varphi_{RB}/_C^S - \varphi_{C/RB}^S) \xi_R^S - (\varphi_{R/CS}^S - \varphi_{CS/R}^S) \xi_B^R$$

sommando membro a membro, segue la (3-12).

e introducendo i due spinori A_{AB} e B_{AB} che rappresentano le parti di Φ_{AB} costruite rispettivamente, secondo la (3-1), con la parte hermitiana φ_{RS} ed anti-hermitiana ψ_{RS} dello spinore potenziale, la (3-11) si può così trasformare:

$$(3-13) \quad \frac{1}{4} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{ (A_{BS} + B_{BS}) \xi_C^S + (A_{CR} - B_{CR}) \xi_B^R \}] / {}^C_A dx + \\ + \frac{1}{4} \int_{\tau} [\theta^{AB} \{ (A_{BS} + B_{BS}) \xi_C^S + (A_{CR} - B_{CR}) \xi_B^R \}] / {}^C_A dx + \frac{1}{2} \int_{\tau} (\varphi \xi^{CA})_{/CA} dx = 0.$$

Posto:

$$(3-14) \quad E_{CAHK} \equiv \frac{1}{4} [\theta_{AB} \Phi_K^B \varepsilon_{HC} + \theta_{AK} (A_{CH} - B_{CH}) + \theta_{CB} \Phi_H^B \varepsilon_{KA} + \\ + \theta_{CH} (A_{AK} - B_{AK})] + \frac{1}{2} \varphi \varepsilon_{HC} \varepsilon_{KA} \quad (23)$$

(dove ε_{KA} è lo spinore doppio emisimmetrico fondamentale: $\|\varepsilon_{AK}\| = \|\varepsilon^{AK}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$), la (3-13) si scrive:

$$(3-15) \quad \int_{\tau} (E_{CAHK} \xi^{HK}) / {}^CA dx = 0.$$

Tenendo infine conto dell'espressione esplicita di ξ^{HK} :

$$(3-16) \quad \xi^{HK} = \alpha^{HK} + \eta^{KC} X_C^H + \eta^{HB} X_B^K$$

(dedotta dalla (1-12), ricordando la (3-10) e ponendo: $\alpha^{HK} = g_a^{HK} a^a$; $X^{RS} = g_o^{RS} x^o$ (24)) e dovendo la (3-15) essere verificata identicamente rispetto ai parametri arbitrari α^{HK} ed η^{KC} , si ottengono le leggi di conservazione in forma spinoriale:

$$(3-17) \quad E_{CAHK} / {}^CA = 0$$

$$(3-18) \quad \begin{cases} (E_{CAHK} X_D^H + E_{CAHD} X_K^H) / {}^CA = 0 \\ (E_{CAHK} X_B^K + E_{CABK} X_H^K) / {}^CA = 0. \end{cases}$$

La (3-17) equivale a quattro equazioni scalari reali (infatti il suo primo membro è uno spinore hermitiano, per quanto osservato nella nota (23)) e

(23) Si verifica facilmente che:

$$\bar{E}_{CAHK} \equiv E_{CAHK} = E_{ACKH}$$

ossia che lo spinore E_{CAHK} è hermitiano nelle due coppie di indici CA e HK .

(24) Si ha: $g_a^{HK} \omega_o^a x^o = \frac{1}{2} \xi^{HK} / {}^{RS} X^{RS} = -X^{RK} \eta_R^H - X^{HS} \eta_S^K$ (cfr. nota (20)).

le (3-18) equivalgono a sei equazioni scalari reali (essendo l'una la complessa coniugata dell'altra, con a primo membro uno spinore doppio simmetrico).

Si hanno ancora le dieci identità deboli di conservazione, dal consueto significato fisico.

Lo spinore E_{CAHK} rappresenta lo spinore energetico totale del campo. Esso è invariante rispetto alle trasformazioni (3-2) e risulta simmetrico nello scambio della prima con la seconda coppia di indici:

$$(3-19) \quad E_{CAHK} = E_{HKCA}.$$

Segue infatti dalle (3-18), tenendo conto della (3-17):

$$(3-20) \quad \begin{cases} E_{CD}^C{}_K + E_{CK}^C{}_D = 0 \\ E_{BAH}^A + E_{HAB}^A = 0. \end{cases}$$

Scomposto pertanto E_{CAHK} nelle parti simmetrica ed emisimmetrica rispetto alla coppia di indici non puntati A e K:

$$(3-21) \quad E_{CAHK} = \frac{1}{2}(E_{CAHK} + E_{CKHA}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{AK} E_{CDH}^D$$

la prima delle (3-20) assicura che $\frac{1}{2}(E_{CAHK} + E_{CKHA})$ è simmetrico anche rispetto agli indici puntati C e H, mentre la seconda delle (3-20) assicura che E_{CDH}^D è emisimmetrico rispetto a C e H. Si ha cioè:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{AK} E_{CDH}^D = \frac{1}{4}\varepsilon_{AK}\varepsilon_{CH} E_{BD}^{BD}$$

ed anche tale termine gode quindi della simmetria (3-19).

4. CASO PARTICOLARE: CAMPO ELETTROMAGNETICO NEUTRO NEL VUOTO

Se lo spinore doppio Φ_{AB} è lo spinore atto a caratterizzare il campo elettromagnetico nel vuoto e l'azione è quella di puro campo elettromagnetico espressa in forma spinoriale ⁽²⁵⁾:

$$(4-1) \quad A = \int_{\tau} 2 (\Phi_{AB} \Phi^{AB} + \Phi_{\dot{A}\dot{B}} \Phi^{\dot{A}\dot{B}}) dx$$

si ha:

$$(4-2) \quad \theta^{AB} = 8 \Phi^{AB}.$$

(25) E. UDESCHINI BRINIS, «Questi Rendic.», 40 (5), 828 (1966).

Lo spinore energetico (3-14) assume pertanto l'espressione:

$$(4-3) \quad E_{\text{CAHK}} = 2 [\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} \varepsilon_{\text{HC}} + \Phi_{\text{AK}} (A_{\text{CH}} - B_{\text{CH}}) + \Phi_{\text{CB}} \Phi_{\text{H}}^{\text{B}} \varepsilon_{\text{KA}} + \\ + \Phi_{\text{CH}} (A_{\text{AK}} - B_{\text{AK}})] + (\Phi_{\text{EB}} \Phi^{\text{EB}} + \Phi_{\text{EB}} \Phi^{\text{EB}}) \varepsilon_{\text{HC}} \varepsilon_{\text{KA}}.$$

Poichè:

$$\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{AK}} \Phi_{\text{EB}} \Phi^{\text{EB}} \quad (26)$$

si ottiene, a semplificazioni eseguite:

$$(4-4) \quad E_{\text{CAHK}} = 4 (A_{\text{AK}} A_{\text{CH}} - B_{\text{AK}} B_{\text{CH}}).$$

Il risultato si accorda con quello ottenuto in forma tensoriale: si presentano due addendi costruiti con le sole parti dello spinore elettromagnetico provenienti dallo spinore potenziale hermitiano e da quello anti-hermitiano. Annullando l'una o l'altra si ricade nell'espressione dello spinore energetico equivalente al tensore di Minkowsky ⁽²⁷⁾.

(26) Si ha difatti:

$$\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} = \frac{1}{2} (\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} - \Phi_{\text{A}}^{\text{B}} \Phi_{\text{BK}}) = \frac{1}{2} (\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} - \Phi_{\text{KB}} \Phi_{\text{A}}^{\text{B}}).$$

Posto, per l'emisimmetria rispetto agli indici A e K: $\Phi_{\text{AB}} \Phi_{\text{K}}^{\text{B}} = \varepsilon_{\text{AK}} \Omega$, saturando ambo i membri con ε^{AK} segue: $\Omega = \frac{1}{2} \Phi_{\text{AB}} \Phi^{\text{AB}}.$

(27) E. M. CORSON, *loco citato*.