Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabio Manaresi

Una identità integrale per le funzioni biarmoniche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.5, p. 538–544.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_5_538_0>

Analisi matematica. — *Una identità integrale per le funzioni biarmoniche.* Nota di FABIO MANARESI, presentata (*) dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — An integral identity for biharmonic functions in an open sphere is established. Using this identity we prove the uniqueness of the biharmonic function which satisfies, in the sense of mean convergence, given conditions on the boundary. These results are extended to the case of a possibly unbounded open set.

1. – Il problema di Dirichlet per l'equazione lineare generale, alle derivate parziali, del secondo ordine di tipo ellittico è stato studiato da G. Cimmino [1] con una formulazione della condizione al contorno, che conduce, in maniera naturale, a dare valori da essere assunti su questo, espressi mediante funzioni in spazi L^2, e a considerare la frontiera non semplicemente come insieme dei suoi punti, ma come insieme di *cammini di avvicinamento* dall'interno ai punti stessi: viene cioè imposto alla soluzione di convergere in media, dall'interno dell'aperto dove è definita, verso i valori assegnati sulla frontiera, rispetto a un sistema di varietà approssimanti la frontiera medesima.

In tale studio si presenta anzitutto la questione di provare l'unicità della soluzione che assuma, nel senso della convergenza in media, anzichè nel senso classico della convergenza uniforme, i valori assegnati al contorno.

Come il teorema di unicità di tipo classico può essere dedotto rapidamente dalla circostanza che il massimo del modulo di ogni soluzione, non identicamente nulla, dell'equazione omogenea, nella chiusura di un aperto limitato viene assunto in punti frontiera, e quindi cresce con l'ampliarsi dell'aperto, così similmente è immediato provare l'unicità della soluzione, convergente in media a valori al contorno assegnati, quando si trova che ogni soluzione, non identicamente nulla, dell'equazione omogenea ha, su una varietà approssimante dall'interno la frontiera, una norma hilbertiana, che cresce con l'espandersi di tale varietà verso la frontiera stessa.

Una proprietà di crescenza di questo tipo è stata provata da G. Cimmino [1] per soluzioni di equazioni ellittiche e da B. Pini [2] per soluzioni di equazioni paraboliche del secondo ordine. Essa dipende dal verificarsi di una certa identità integrale per le soluzioni dell'equazione omogenea.

Nel presente lavoro si mostra come la prima fase di uno studio di questo genere si possa estendere, a costo di calcoli laboriosi, ma sempre di carattere elementare, al caso di problemi generalizzati di Dirichlet per equazioni ellittiche di ordine superiore al secondo. Precisamente, viene stabilita (n. 2) una identità integrale per le funzioni biarmoniche in una sfera aperta, dalla

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1971.

quale discende (n. 3) l'unicità di una funzione cosiffatta, che verifichi, nel senso della convergenza in media, assegnate condizioni al contorno. Nel n. 4 e nel n. 5 si estendono i risultati precedenti alle funzioni biarmoniche in un aperto anche non limitato: i calcoli relativi all'identità integrale, di cui al n. 4, verranno pubblicati altrove.

Si ricorda infine che, per altra via, un teorema di unicità per il problema biarmonico fondamentale, generalizzato in senso simile a quello qui considerato, è stato ottenuto da B. Pini [3], mentre un'analoga generalizzazione, nel caso di una equazione parabolica del quarto ordine, è stata data da L. Cattabriga [4].

2. – Sia Ω la sfera aperta n–dimensionale ($n \geq 2$) di centro O e raggio r. Per ogni fissato valore del parametro $t \in]0, r[$, la varietà

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 &= t \cos s_1 \\
x_2 &= t \operatorname{sen} s_1 \cos s_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= t \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \cdots \operatorname{sen} s_{n-2} \cos s_{n-1} \\
x_n &= t \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2 \cdots \operatorname{sen} s_{n-2} \operatorname{sen} s_{n-1}
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

con $s = (s_1, \cdots, s_{n-2}, s_{n-1}) \in \mathrm{S} = [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, rappresenta la frontiera di una sfera aperta $\Omega(t)$ di centro O e raggio $t \in]0, r[$, talchè $\overline{\Omega}(t) \subset \Omega$: le suddette varietà sono di livello della funzione $\sqrt{\sum_1^n {}_k x_k^2}$.

Se $u(x)$, con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, è una funzione dotata di derivate parziali fino al quarto ordine continue in Ω, valgono le identità

$$
u \, \Delta\Delta u - (\Delta u)^2 = \sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u \Delta \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta u \right),
\tag{2}
$$

$$
\sum_1^n {}_k x_k \left(u \, \Delta \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta u \right) =
\tag{3}
$$

$$
= 2 \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_1^n {}_i x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} u - \sum_1^n {}_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right).
$$

Posto

$$
\mathrm{J} = \frac{\partial (x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial (t, s_1, \cdots, s_{n-1})} = t^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} s_1 \operatorname{sen}^{n-3} s_2 \cdots \operatorname{sen} s_{n-2},
$$

$$
\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \quad , \quad \mathrm{d}s = \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \cdots \mathrm{d}s_{n-1}
$$

e denotate le (1) con $x = x(t, s)$, in base alla (2), alla formula di Gauss–Green e alla (3), si trae successivamente

$$
\int_0^t \tau \, \mathrm{d}\tau \int_{\overline{\Omega}(\tau)} [u \, \Delta\Delta u - (\Delta u)^2] \, \mathrm{d}x = \int_0^t \tau \, \mathrm{d}\tau \int_{\overline{\Omega}(\tau)} \sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u \, \Delta \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta u \right) \mathrm{d}x =
$$

$$= \int_0^t \tau \, d\tau \int_S \left\{ \sum_1^n {}_k \left(u \Delta \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta u \right) \frac{\partial t}{\partial x_k} \right\}_{x=x(\tau,s)} J(\tau, s) \, ds =$$

$$= \int_{\bar{\Omega}(t)} \sum_1^n {}_k x_k \left(u \Delta \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \Delta u \right) dx = 2 \int_{\bar{\Omega}(t)} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx +$$

$$+ \int_S \left\{ \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^n {}_i x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} u - \sum_1^n {}_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial t}{\partial x_k} \right\}_{x=x(t,s)} J \, ds =$$

$$= 2 \int_{\bar{\Omega}(t)} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_S \left\{ tu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - u \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{x=x(t,s)} J \, ds ,$$

da cui

$$(4) \qquad \int_S tJ \left\{ u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}_{x=x(t,s)} ds = \int_S tJ \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{x=x(t,s)} ds + \int_S J \left\{ u \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{x=x(t,s)} ds -$$

$$- 2 \int_{\bar{\Omega}(t)} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_0^t \tau \, d\tau \int_{\bar{\Omega}(\tau)} [u \Delta\Delta u - (\Delta u)^2] \, dx .$$

Si assuma come norma della u su $\partial\Omega(t)$ la radice quadrata di

$$(5) \qquad \int_S tJu^2(x(t, s)) \, ds .$$

Se la $u(x)$ è biarmonica in Ω, derivando due volte rispetto a t l'integrale (5) e tenendo conto della (4), si ricava

$$(6) \qquad \frac{d}{dt} \int_S tJu^2(x(t, s)) \, ds = n \int_S Ju^2(x(t, s)) \, ds + 2 \int_S tJ \left\{ u \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{x=x(t,s)} ds ,$$

$$(7) \qquad \frac{d^2}{dt^2} \int_S tJu^2(x(t,s)) \, ds = n(n-1) \int_S \frac{J}{t} u^2(x(t,s)) \, ds + 4 \int_S tJ \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x(t,s)) \right]^2 ds +$$

$$+ (4n + 2) \int_S J \left\{ u \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{x=x(t,s)} ds - 2 \int_{\bar{\Omega}(t)} \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx - \int_0^t \tau \, d\tau \int_{\bar{\Omega}(\tau)} (\Delta u)^2 \, dx .$$

Di quest'ultima identità ci si può servire per ottenere l'estensione dei procedimenti relativi ad equazioni del secondo ordine ricordati nel n. 1.

3. – Data una funzione $\varphi(s)$ di quadrato sommabile in S, si dirà che la $u(x)$ converge in media su $\partial\Omega$ verso la $\varphi(s)$, rispetto alla famiglia di varietà (1), con $t \in]0, r[$, $s \in S$, e alla funzione peso J, se e solo se risulta

$$\lim_{t \to r} \int_S J [u(x(t, s)) - \varphi(s)]^2 \, ds = 0 .$$

Ciò premesso, si prova il seguente teorema di unicità.

I. – *Date le funzioni* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *di quadrato sommabile in* S, *non può esistere più di una funzione* $u(x)$ *biarmonica in* Ω *e tale che essa e la* $\partial u/\partial t$ *convergano in media su* $\partial\Omega$, *nel senso prima chiarito, rispettivamente verso* $\varphi(s)$ *e* $\psi(s)$.

Basta dimostrare che una funzione $u(x)$, biarmonica in Ω, è identicamente nulla se verifica le condizioni

$$(8)\qquad \lim_{t\to r}\int_S \mathrm{J}u^2(x(t,s))\,\mathrm{d}s = 0\,,\qquad \lim_{t\to r}\int_S \mathrm{J}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x(t,s))\right]^2\cdot\mathrm{d}s = 0\,.$$

Infatti, dalle (6) e (8) segue

$$(9)\qquad \lim_{t\to r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S t\mathrm{J}u^2(x(t,s))\,\mathrm{d}s = 0\,;$$

inoltre, se la $u(x)$ è biarmonica e non identicamente nulla, dalle (7) e (8) si trae che esiste un $t_0 \in\,]0, r[$ tale che, $\forall t \in\,]t_0, r[$, il primo membro della (7) risulti negativo. Ne consegue che in $]t_0, r[$ il primo membro della (6) è decrescente e quindi, giusta la (9), è positivo, onde l'integrale (5), che non è mai negativo, risulta crescente nel suddetto intervallo e questa circostanza è manifestamente incompatibile con la prima delle (8).

4. – Sia Ω un aperto n-dimensionale ($n \geq 2$). Per ogni fissato valore del parametro $t \in\,]0, r[$, ponendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, la

$$(10)\qquad x = x(t, s)\,,$$

con $s = (s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) \in \mathrm{S} = [0, \mathrm{L}_1]\times[0, \mathrm{L}_2]\times\cdots\times[0, \mathrm{L}_{n-1}]$, rappresenti una varietà chiusa sufficientemente regolare, la quale costituisca la frontiera di un aperto limitato $\Omega(t)$ tale che $\overline{\Omega}(t) \subset \Omega$, e che, $\forall t_1, t_2 \in\,]0, r[$, con $t_1 < t_2$, risulti $\overline{\Omega}(t_1) \subset \Omega(t_2)$; inoltre si abbia

$$\Omega = \bigcup_{t\in\,]0,r[} \Omega(t)\,.$$

Posto $\overline{\Omega}' = [0, r]\times\mathrm{S}$, $\Omega' = \overline{\Omega}' - \partial\overline{\Omega}'$, la (10), con $t \in\,]0, r[$, $s \in \mathrm{S}$, rappresenti la famiglia delle varietà di livello di una funzione $t(x)$ e stabilisca una corrispondenza biunivoca tra Ω' e $\Omega - \mathrm{H}$, dove H è un insieme di misura nulla contenuto in Ω.

Siano $\mathrm{P}(t, s)$ una funzione continua in $\overline{\Omega}'$ e positiva in Ω', $f(t)$ una funzione continua in $[0, r]$ e positiva in $]0, r]$, riesca $\mathrm{J} = \dfrac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(t, s_1, \cdots, s_{n-1})} > 0$ in Ω' e si ponga

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\quad,\quad \frac{1}{\gamma} = \mathrm{J}\sum_{1}^{n}{}_k\left(\frac{\partial t}{\partial x_k}\right)^2.$$

Ciò premesso, sia $u(x)$ una funzione dotata di derivate parziali fino al quarto ordine continue in Ω e si assuma come norma della $u(x)$ su $\partial\Omega(t)$ la radice quadrata di

$$\int_S f\,P\,u^2(x(t,s))\,ds\,. \tag{11}$$

In opportune ipotesi di regolarità sulle funzioni $t(x)$, $P\gamma$, $P\gamma^2 J$, f, designando con ν la normale positiva (esterna) a $\partial\Omega(t)$ e con Δ il laplaciano rispetto alle $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se la $u(x)$ è biarmonica in Ω, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_S f\,P\,u^2(x(t,s))\,ds = 2\int_S f\,P\left\{\sqrt{\gamma J}\,u\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\}_{x=x(t,s)} ds + \int_S J\left\{\sum_1^n{}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f\,P\gamma\,\frac{\partial t}{\partial x_k}\right)u^2\right\}_{x=x(t,s)} ds\,, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\int_S f\,Pu^2(x(t,s))\,ds &= 4\int_S f\,PJ\left\{\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\right\}_{x=x(t,s)} ds\;+\\
&+ 2\int_S\left\{\sqrt{\gamma J}\,[\gamma^{-1}(\Delta(fP\gamma^2 Jt) - t\Delta(fP\gamma^2 J)) + J(\Delta(FP\gamma) - F\Delta(P\gamma))]\,u\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\}_{x=x(t,s)} ds\;+\\
&+\int_S -J\left\{\sum_1^n{}_i\left[\frac{\partial t}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,\Delta(P\gamma^2 J) + \frac{\partial t}{\partial x_i}\,\Delta\left(P\gamma^2 J\,\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial P\gamma^2 J}{\partial x_i}\,\Delta t\;+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(2\,P\gamma\sum_1^n{}_k\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\gamma J\,\frac{\partial t}{\partial x_i}\right) - P\gamma^2 J\,\frac{\partial t}{\partial x_i}\,\Delta F\right)\right]u^2\right\}_{x=x(t,s)} ds\;+\\
&+\int_{\Omega(t)}[\Delta\Delta(P\gamma^2 JF) - F\,\Delta\Delta(P\gamma^2 J)]\,u^2\,dx\;+\\
&+4\int_{\Omega(t)} -\sum_1^n{}_{ki}\left(\frac{\partial^2 P\gamma^2 JF}{\partial x_k\,\partial x_i} - F\,\frac{\partial^2 P\gamma^2 J}{\partial x_k\,\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\;+\\
&+2\int_0^t f(\tau)\,d\tau\int_{\Omega(\tau)}\left[2\sum_1^n{}_{ki}\frac{\partial^2 P\gamma^2 J}{\partial x_k\,\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\,\Delta\Delta(P\gamma^2 J)\,u^2\right]dx\;+\\
&+2\int_0^t -f(\tau)\,d\tau\int_{\Omega(\tau)} P\gamma^2 J\,(\Delta u)^2\,dx\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

La (12) e la (13), se la (10) si riduce alla (1) e si assume $f(t) = t$, $P\gamma^2 J = 1$, talchè $P = J$, divengono rispettivamente la (6) e la (7).

5. – Si prova il seguente teorema di unicità.

I. – *Se in* Ω *riesce*

$$
(14)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\Delta\Delta\,(P\gamma^2\,JF) - F\,\Delta\Delta\,(P\gamma^2\,J) \leq 0\,,\\[4pt]
\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_1^n{}_{ki}\left(\frac{\partial^2 P\gamma^2 JF}{\partial x_k\,\partial x_i} - F\,\frac{\partial^2 P\gamma^2 J}{\partial x_k\,\partial x_i}\right)\lambda_k\,\lambda_i \geq 0\\[4pt]
\displaystyle\sum_1^n{}_{ki}\,\frac{\partial^2 P\gamma^2 J}{\partial x_k\,\partial x_i}\,\lambda_k\,\lambda_i \leq 0
\end{array}\right\}\quad \forall\lambda_k\,,\,\lambda_i \in R,\\[4pt]
\Delta\Delta\,(P\gamma^2 J) \geq 0\,,
\end{array}\right.
$$

e se $\exists\, M > 0$, $t_0 \in\,]0\,,r[$ *tali che,* $\forall t \in\,]t_0\,,r[$, $s \in S$, *negli integrali a secondo membro di* (12), *i coefficienti di* $u\,(\partial u/\partial\nu)$ *e di* u^2 *siano, in modulo, non superiori a* MP *e, negli integrali a secondo membro di* (13), *i coefficienti, in modulo, di* $(\partial u/\partial\nu)^2$ *e di* $u\,(\partial u/\partial\nu)$ *e il coefficiente di* u^2 *siano non superiori a* MP, *date le funzioni* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *di quadrato sommabile in* S, *non può esistere più di una funzione* $u(x)$, *biarmonica in* Ω *e tale che essa e la* $\partial u/\partial\nu$ *convergano in media su* $\partial\Omega$ *corrispondentemente verso* $\varphi(s)$ *e* $\psi(s)$, *rispetto alla famiglia di varietà* (10), *con* $t \in\,]0\,,r[$, $s \in S$, *e alla funzione peso* P, *nel senso chiarito nel n. 3.*

Basta dimostrare che una funzione $u(x)$, biarmonica in Ω, non può essere che identicamente nulla se verifica le condizioni

$$
(15)\qquad \lim_{t\to r}\int_S P u^2\,(x\,(t\,,s))\,ds = 0\,,\qquad \lim_{t\to r}\int_S P\left[\frac{\partial u}{\partial\nu}\,(x\,(t\,,s))\right]^2 ds = 0\,.
$$

Infatti, dalla (12), dalle ipotesi sui coefficienti di $u\,(\partial u/\partial\nu)$ e di u^2 negli integrali a secondo membro di (12) e dalle (15) segue

$$
(16)\qquad \lim_{t\to r}\frac{d}{dt}\int_S f\,P u^2\,(x\,(t\,,s))\,ds = 0\,.
$$

Se la $u(x)$ è biarmonica e non identicamente nulla, si considerino gli integrali a secondo membro della (13): l'ultimo si mantiene inferiore a una quantità negativa fissa, $\forall t \in\,]0\,,r[$ e abbastanza prossimo a r; inoltre, per le (14), il quarto, il quinto e il sesto sono non positivi, mentre il primo e il secondo, in virtù delle (15), tendono a zero per $t\to r$. Circa il terzo integrale, si noti che, ove la funzione integranda non assuma soltanto valori non positivi, prendendo come insieme di integrazione quello dei punti in cui la funzione medesima è positiva, si ottiene una quantità che, per le ipotesi fatte, è infinitesima per $t\to r$, onde, in ogni caso, il terzo integrale si può scomporre nella somma di una quantità non positiva e di un'altra che tende a zero per $t\to r$.

Pertanto $\exists\, t_0 \in\,]0\,,r[$ tale che, $\forall\, t \in\,]t_0\,,r[$, il primo membro della (13) risulti negativo. Ne consegue che in $]t_0\,,r[$ il primo membro della (12) è decrescente e quindi, giusta la (16), è positivo, per cui l'integrale (11), che non è mai negativo, risulta crescente nel suddetto intervallo e questa circostanza è incompatibile con la prima delle (15).

La proposizione dimostrata comprende 3, I, avendo presente quanto si è detto alla fine del n. 4.

Bibliografia

[1] G. Cimmino, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », *61*, 177–224 (1937).

[2] B. Pini, *Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine*, « Riv. mat. Univ. Parma », *3*, 153–187 (1952).

[3] B. Pini, *Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno*, « Boll. U.M.I. », s. III, a. X, n. 4, 465–473 (1955).

[4] L. Cattabriga, *Una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per equazioni paraboliche lineari*, « Ann. di Mat. pura ed appl. », s. IV, *46*, 215–248 (1958).