
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIO FIORENTINI

**Esempi di anelli di Cohen-Macaulay semifattoriali
che non sono di Gorenstein**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 50 (1971), n.5, p. 524–529.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_5_524_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Esempi di anelli di Cohen-Macaulay semifattoriali che non sono di Gorenstein* (*). Nota di MARIO FIORENTINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We give some examples of Cohen-Macaulay semifactorial rings which are not Gorenstein.

INTRODUZIONE

Sia A un anello commutativo con identità. Si considerino le seguenti asserzioni:

- (a) A è intersezione completa;
- (b) A è di Gorenstein;
- (c) A è di Cohen-Macaulay;
- (d) A è fattoriale;
- (e) A è semifattoriale;
- (f) A è normale.

Sono note, in ipotesi generali, le inclusioni strette:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c).$$

In [2] e [3] vi sono esempi significativi mostranti che $(c) \not\Rightarrow (b)$. Sono anche note le inclusioni:

$$(e) \Leftarrow (d) \Rightarrow (f).$$

Non deve inoltre stupire il fatto che non sono ancora conosciuti, nel caso generale, eventuali legami d'inclusione tra gli anelli fattoriali e quelli di Cohen-Macaulay o di Gorenstein. La fattorialità è una nozione molto riposta, che sta alla base di questioni profonde di Algebra, Teoria dei numeri, Topologia e Geometria algebrica non ancora sviscerate. La fattorialità non è una proprietà locale (cioè non è vero che A è fattoriale se e soltanto se $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A). A differenza di quanto avviene per gli anelli di Cohen-Macaulay o di Gorenstein, non è vero in generale, ossia senza imporre condizioni particolari, che A è fattoriale $\Leftrightarrow A[[X_1, \dots, X_n]]$ è fattoriale, oppure se $\hat{A}$ è il completato di A rispetto ad una topologia I -adica, che A è fattoriale $\Leftrightarrow \hat{A}$ è fattoriale.

È noto che la fattorialità ha la seguente interpretazione geometrica: l'anello delle coordinate di una varietà irriducibile V è fattoriale se e soltanto

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1971.

se tutte le sottovarietà irriducibili di V di codimensione 1 sono intersezioni complete (di V con una qualche ipersuperficie). Risultati classici di M. Noether, Klein, Fano, Severi, Lefschetz, Andreotti, Nagata, Grothendieck ed altri, su questo problema, presentano zone oscure che attendono di essere risolte.

P. Samuel ha affermato in [9] di non conoscere un esempio di anello fattoriale che non sia di Gorenstein o di Cohen-Macaulay. Al quesito posto da Samuel ha dato una parziale risposta P. Murty in [7] dimostrando che, nelle ipotesi particolari che Q sia un anello locale fattoriale quoziente di un anello locale regolare (per esempio se Q è un anello completo o geometrico), risultano tra loro equivalenti le due condizioni:

- (i) Q è un anello di Cohen-Macaulay;
- (ii) Q è un anello di Gorenstein.

In questa Nota dimostriamo che gli anelli delle coordinate di una particolare famiglia di varietà di Veronese, e precisamente le curve razionali normali di $P^n(K)$, dove K è un campo algebricamente chiuso, sono di Cohen-Macaulay e semifattoriali ma non di Gorenstein. Il risultato segue dal Teorema 2 da noi dimostrato in [3], combinato col Teorema 1 di questa Nota, che stabilisce che ogni immersione in $P^n(K)$ di una varietà proiettiva V il cui anello delle coordinate omogenee è fattoriale è una varietà W semifattoriale.

1. - DEFINIZIONI E RICHIAMI

Tutti gli anelli considerati sono supposti commutativi e muniti di elemento unità. Tutti gli omomorfismi di anelli sono supposti trasformare l'elemento unità nell'elemento unità. Ogni sottoanello di un anello A è supposto contenere l'elemento unità di A .

Siano A un anello e B l'anello totale delle frazioni di A ; un sotto- A -modulo α di B si dice *ideale frazionario* di A se esiste un elemento $d \in A$, non divisore dello zero, tale che $d\alpha \subset A$. Gli ideali di A sono evidentemente ideali frazionari; per maggior chiarezza saranno talvolta chiamati *ideali interi* di A .

L'insieme degli ideali frazionari di A con la moltiplicazione è un monoide commutativo, il cui elemento neutro è l'ideale intero A . Gli elementi invertibili di tale monoide si chiamano *ideali frazionari invertibili* e formano un gruppo abeliano che indichiamo con $J(A)$; inoltre l'insieme $L(A)$ costituito dagli ideali frazionari liberi di A è un sottogruppo di $J(A)$. Il gruppo quoziente $C(A) = J(A)/L(A)$ dicesi *gruppo delle classi di ideali frazionari invertibili* di A . Ogni elemento di $C(A)$ è immagine di un ideale intero di A ; in particolare si ha: $C(A) = 0$ se e soltanto se ogni ideale invertibile di A è libero (vedi [4]). Sia $\text{Pic}(A)$ l'insieme delle classi di A -moduli proiettivi di rango 1 (ottenuto identificando gli A -moduli proiettivi di rango 1 tra

loro isomorfi, cfr. [1], cap. II, § 5, n. 4), e indichiamo con $cl(E)$ l'immagine in $Pic(A)$ dell' A -modulo proiettivo di rango 1 E . La somma $cl(E) + cl(F) = cl(E \otimes F)$ è ben definita e munisce $Pic(A)$ di una struttura di gruppo abeliano. $Pic(A)$ si dice pertanto *gruppo delle classi di A -moduli proiettivi di rango 1*. Ricordiamo che un A -modulo M di tipo finito è proiettivo di rango n se e soltanto se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A , l' $A_{\mathfrak{m}}$ -modulo $M \otimes A_{\mathfrak{m}}$ è libero di rango n . È anche noto (cfr. [1], cap. II, § 5, n. 7), che se A è un anello noetheriano o è un anello integro i gruppi $C(A)$ e $Pic(A)$ sono isomorfi.

DEFINIZIONE 1. *Sia A un dominio integro. A è detto fattoriale se, per ogni elemento $a \in A$, $a \neq 0$, a non invertibile, l'elemento a è prodotto di elementi primi.*

DEFINIZIONE 2. *Il dominio integro A è detto semifattoriale se, per ogni elemento $a \in A$, $a \neq 0$, a non invertibile, esiste un intero n tale che a^n è prodotto di elementi primari.*

PROPOSIZIONE 1. *Sia A un anello integro noetheriano. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

- (i) A è fattoriale;
- (ii) ogni ideale primo di altezza 1 in A è principale;
- (iii) l'intersezione di ogni coppia di ideali principali di A è un ideale principale;
- (iv) ogni elemento irriducibile di A genera un ideale primo.

Dimostrazione. Vedi [9].

PROPOSIZIONE 2. *Sia A un anello integro noetheriano integralmente chiuso (o, più in generale, un anello di Krull). Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

- (j) A è semifattoriale;
- (jj) il gruppo delle classi di divisori $C(A)$ è di torsione;
- (jjj) se f, g è una coppia di elementi di A , allora, per un intero n , $f^n A \cap g^n A$ è un ideale principale;

Dimostrazione. Vedi [12].

2. - UN TEOREMA SUGLI ANELLI DI COORDINATE DI VARIETÀ FATTORIALI

Ricordiamo alcuni risultati sugli anelli di coordinate di varietà algebriche.

DEFINIZIONE 3. *Una sottovarietà V dello spazio proiettivo $P^{n-1}(K)$, dicesi di Cohen-Macaulay (di Gorenstein), se il suo anello delle coordinate omogenee è di Cohen-Macaulay (di Gorenstein).*

DEFINIZIONE 4. Una sottovarietà V dello spazio affine K^n (dello spazio proiettivo $P^{n-1}(K)$), dicesi localmente di Cohen-Macaulay (localmente di Gorenstein), nel punto $x \in V$, se l'anello locale $O_{V,x}$ (dove O_V indica il fascio strutturale di V), è un anello di Cohen-Macaulay (di Gorenstein).

DEFINIZIONE 5. La sottovarietà V dicesi localmente di Cohen-Macaulay (di Gorenstein), se essa è localmente di Cohen-Macaulay (di Gorenstein), in ogni punto x di V .

Osservazione. La nozione introdotta dalla definizione 3 viene a dipendere dalla immersione della varietà. Infatti le curve razionali normali, che sono isomorfe alla retta proiettiva che è di Gorenstein, non sono varietà di Gorenstein in $P^{n-1}(K)$, come sarà dimostrato nel n. 3. Invece, le definizioni 4 e 5 non dipendono dalla immersione della varietà.

PROPOSIZIONE 3. Una varietà proiettiva non singolare V è una varietà di Cohen-Macaulay (di Gorenstein), se e soltanto se il completamento dell'anello locale del vertice del cono affine di V , che denotiamo con $C(V)$, è di Cohen-Macaulay (di Gorenstein).

Dimostrazione. Sia $O = O_{C(V),x}$. L'anello O è di Cohen-Macaulay se e soltanto se $\bar{O}$, cioè il completamento di O , è di Cohen-Macaulay (vedi [8], Ch. III, 25.8). Sia k il campo residuo di O . Poiché $\bar{O}$ è un modulo piatto, si ha

$$\text{Ext}_O^i(k, \bar{O}) = \text{Ext}_O^i(k, O) \otimes_O \bar{O}.$$

D'altro canto O è un anello di Gorenstein se e soltanto se

$$\text{Ext}_O^i(k, O) = \begin{cases} 0, & \text{per } i \neq n \\ k, & \text{per } i = n, \text{ con } n = \dim O. \end{cases}$$

Inoltre, se O è un anello di Gorenstein, $\text{Ext}_O^i(k, O) = 0$, per $i \neq n$, mentre $\text{Ext}_O^n(k, \bar{O}) = k \otimes_O \bar{O} = k$; e ciò mostra che $\bar{O}$ è di Gorenstein. Reciprocamente, se $\bar{O}$ è di Gorenstein, $\text{Ext}_O^i(k, \bar{O}) = 0$, per $i \neq n$, di conseguenza $\text{Ext}_O^i(k, O) \otimes_O \bar{O} = 0$; da qui discende $\text{Ext}_O^i(k, O) = 0$, perché $\bar{O}$ è fedelmente piatto su O . Inoltre $\text{Ext}_O^n(k, \bar{O}) = k$, pone in evidenza che $\text{Ext}_O^n(k, O) = k$, giacché $\text{Ext}_O^n(k, O) \otimes_O \bar{O} = k$.

TEOREMA I. Sia V una varietà algebrica irriducibile associata all'ideale primo $\mathfrak{p}$, il cui anello delle coordinate omogenee $S = K[x_0, \dots, x_m] = K[X_0, \dots, X_m]/\mathfrak{p}$, con K campo algebricamente chiuso, è fattoriale. Sia W una immersione di V in uno spazio proiettivo $P^n(K)$ di anello delle coordinate $K[y_0, \dots, y_n]$. La varietà W è semifattoriale.

Dimostrazione. Sappiamo che $\text{Pic}(V) = \text{Pic}(W) = G$, dove, se $\hat{H}$ è la classe della sezione iperpiana H di V , abbiamo $G = \{n\hat{H} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sia $\hat{T}$ la classe della sezione iperpiana T di W . Abbiamo $\hat{T} = m\hat{H}$, quindi

$\{n\hat{T} \mid n \in \mathbf{Z}\} = mG$. Segue allora $\text{Pic}(W)/\{n\hat{T} \mid n \in \mathbf{Z}\} = G/mG = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, e quest'ultimo è un gruppo di torsione; pertanto, applicando la proprietà (jj) della Proposizione 2, si ha che W è una varietà semifattoriale.

COROLLARIO. *La varietà di Veronese, immagine proiettiva del sistema lineare delle ipersuperfici di ordine m di $P^n(K)$, è semifattoriale.*

CONGETTURA. *La varietà di Veronese non è una varietà di Gorenstein dello spazio proiettivo. Questo risultato, nel seguente n. 3, verrà stabilito in un caso particolare.*

3. - LE CURVE RAZIONALI NORMALI

Ci proponiamo di dimostrare il seguente

TEOREMA 2. *Le curve razionali normali dello spazio proiettivo sopra un campo algebricamente chiuso K , hanno anelli delle coordinate di Cohen-Macaulay ma non di Gorenstein.*

Dimostrazione. Sia $V \subset P^{n+1}(K)$ una curva razionale normale. Sappiamo che V è birazionalmente equivalente a $P^1(K)$. Inoltre V , essendo aritmeticamente normale, è anche localmente normale e quindi è non singolare. Ne segue che la corrispondenza tra $P^1(K)$ e V è un isomorfismo $\varphi: P^1(K) \xrightarrow{\sim} V \subseteq P^{n+1}(K)$. Osserviamo che, se $O_V(1)$ è il fascio indotto su V dal fascio $O_{P^{n+1}(K)}(1)$, allora $L = \varphi^* O_V(1)$ è fortemente ampio ed inoltre l'isomorfismo φ è definito dal sistema lineare $\varphi^{-1}(\Gamma(V, O_V(1))) \subseteq (P^1(K), L)$. Ma $\Gamma(V, O_V(1))$ è completo, perché V è proiettivamente normale; pertanto si ha

$$\varphi^{-1}(\Gamma(V, O_V(1))) = \Gamma(P^1(K), L).$$

Segue che $L = O_{P^1(K)}(i)$, per $i > 0$, e $\Gamma(V, O_V)$ può essere identificato con $\Gamma(P^1(K), O_{P^1(K)}(i))$, dove i è l'ordine di V . Quindi abbiamo la rappresentazione parametrica $x_0 = z_0^i, x_1 = z_0^{i-1}z_1, \dots, x_{n+1} = z_1^i$, dove z_0 e z_1 sono coordinate omogenee in $P^1(K)$. Si ricava allora che $n+1 = i$ ed inoltre che l'ideale di V nell'anello $K[x_0, \dots, x_{n+1}]$ è generato dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice $\begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{vmatrix}$. Ma l'anello delle coordinate omogenee di V è isomorfo all'anello $A/\mathfrak{p}_{n-1}$ del Teorema 2 della [3], ed il teorema è dimostrato.

CONGETTURA. *I moduli differenziali degli anelli locali nell'origine dei coni affini corrispondenti alle varietà V sono riflessivi.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris 1961-65.
- [2] J. A. EAGON, *Examples of Cohen-Macaulay rings which are not Gorenstein*, «Math. Zeitschr.», 109-III (1969).
- [3] M. FIORENTINI, *Esempi di anelli di Cohen-Macaulay che non sono di Gorenstein*, «Rend. Lincei», 50, serie VIII, fasc. 2, febbraio 1971.
- [4] S. GRECO, *Sugli ideali frazionari invertibili*, «Rend. Sem. Mat. Padova» 36, 315-333 (1966).
- [5] S. GRECO e P. SALMON, *Topics in $\mathfrak{m}$ -adic Topologies*, «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», Band 58, Springer 1971.
- [6] W. GRÖBNER, *Über Veronesesche Varietäten und deren Projectionen*, «Arch. d. Math.», 16, 257-264 (1965).
- [7] P. MURTY, *A note on factorial rings*, «Arch. der Math.», 15, 418-420 (1964).
- [8] M. NAGATA, *Local rings*, «Interscience Publishers», New York 1962.
- [9] P. SAMUEL, *Lectures on factorization domains*, «Tata Inst. Bombay» (1964).
- [10] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérentes*, «Ann. of Math.», 61, 197-278 (1955).
- [11] J. P. SERRE, *Sur les modules projectifs*, Sémin. Dubreil-Pisot, Paris 1960-61.
- [12] U. STORCH, *Fastfaktorielle Ringe*, Schriftenreihe d. Math. Inst. d. Univ., Munster Heft 36, 1967.