Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

István Fenyö

Sur un théorème de M. Picone

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.5, p. 517–523.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_5_517_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 maggio 1971

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sur un théorème de M. Picone.* Nota di ISTVÀN FENYÖ, presentata [(*)] dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — Si consideri l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e se ne ricerchi una soluzione nella classe delle distribuzioni (secondo L. Schwarz), che verifichi le condizioni $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, y) = g(y)$ dove f e g sono due distribuzioni. I valori locali $u(x, 0)$ e $u(0, y)$ si intendono nel senso di S. Łojasievicz. Il problema posto ha soluzioni se e soltanto se le distribuzioni $f - g$, $f - \check{g}$ sono dispari. Soddisfatta questa condizione le soluzioni le più generali sono date dalla (19) e (20), essendo A una distribuzione pari qualunque.

Récemment M. Mauro Picone [(1)] a consideré das un travail le problème à limite suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u(0, y) = g(y) \qquad (f, g \in C^2). \tag{2}$$

Il a démontré d'une facon trés élégante que le problème (1), (2) n'a de solution dans la classe de fonctions C^2 que si et seulement si $f(x) - g(x)$ et $f(x) - g(-x)$ sont des fonctions impairs et a determiné la forme explicite la plus générale de la solution appartenant à C^2.

Notre but est de donner une généralisation du résultat de M. Picone en considérant le problème (1), (2) pour des distributions (au sens de L. Schwartz).

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1971.

(1) M. PICONE, *Su alcuni problemi di determinazione delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del second'ordine di tipo iperbolico*, « Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Rendiconti ». Ser. XII, Tomo VII, 60–71 (1970).

On cherche donc une distribution u satisfaisant aux conditions (1) et (2) où f et g ne sont plus nécessairement des fonctions de la classe C^2, mais des distributions arbitraires données.

En posant ce problème il s'élève une difficulté, notamment que les valeurs des distributions ne peuvent être défini en général dans un seul point, comme c'est éxigé das les conditions (2). Nous allons démontrer, que si une distribution u est une solution de l'équation differentielle (1), les valeurs locaux figurant en (2) existent.

Grâce à ce fait, le problème (1), (2) garde son sens aussi pour les distributions. Si cela est une fois déjà démontré, on peut suivre l'idée de M. Picone pour trouver la solution la plus générale.

Nous avons besoin de quelques notations et de définitions. Tout d'abord soit $D(R^n)$ l'espace vectorielle des fonctions de n variables réelles indéfiniment dérivables à support compact (l'espace des fonctions fondamentales). $D'(R^n)$ soit son dual (c'est à dire l'espace linéaire des distributions). On va mettre $R^1 = R$. Le produit scalaire d'une distribution T avec une fonction fondamentale φ soit $T \cdot \varphi$.

Nous allons introduire maintenant la transformation $l(a, b) : D(R^2) \to D(R)$ (a, b sont des constantes $a \neq 0$, $b \neq 0$) (2)

$$l(a, b)(\varphi)(t) := \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x, \frac{t-ax}{b}\right) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t-bx}{a}, x\right) dx .$$

Il est facile de voir que $l(a, b)(\varphi)$ est une fonction de la classe $D(R)$ si $\varphi \in D(R^2)$. Cette application est linéaire et, selon la pseudotopologie des espaces des fonctions fondamentales, continue.

Par $L(a, b)$ on désignera l'application adjointe de $l(a, b)$, c'est donc une application linéaire et continue de $D'(R)$ en $D'(R^2)$ définie par (2)

$$L(a, b)(T) \cdot \varphi = T \cdot l(a, b)(\varphi) \qquad (T \in D'(R), \varphi \in D(R^2)) .$$

Si $T = f$, $f \in L_{loc}(R)$ (f est une fonction localement intégrable), on voit immédiatement que $L(a, b)(f)(x, y) = f(ax + by)$. On peut démontrer (2) que

$$\frac{\partial}{\partial x} L(a, b)(T) = a L(a, b)\left(\frac{dT}{dt}\right) \tag{3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} L(a, b)(T) = b L(a, b)\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

(2) I. Fenyö, *Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen.* « Acta Math. Hung. », 7, 383–396 (1957); I. Fenyö, *Équations distributionnelles.* Corso di C.I.M.E., agosto 1970, sous presse.

Comme nous avons déjà mentionné, une distribution ne possède en général une valeur dans un seul point. S. Łojasiewicz [3] a donné une définition de la valeur d'une distribution dans un seul point et a aussi donné le critère pour l'existence de cette valeur.

Soit x_0 un point quelconque et τ_{x_0} l'opération adjoint à celle de $\tau_{-x_0}\,\varphi(x) = \varphi(x-x_0)$. Pour $r \neq 0$ soit $\varkappa_r$ l'opérateur d'affinité; $\varkappa_r$ est adjoint à l'opération $\frac{1}{|r|}\varkappa_{1/r}\,\varphi(x) = \frac{1}{|r|}\,\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$. Selon la définition de M. Łojasiewicz la distribution T possède la valeur t_0 au point x_0, si

$$\lim_{r\to 0} \varkappa_r\,\tau_{x_0}\,\mathrm{T} = t_0 \tag{4}$$

à lieu. Evidemment la limite dans le premier membre de (4) n'existe en général pour chaque distribution T et pour chaque point x_0.

Soit ψ une fonction fondamentale arbitraire mais fixé de la classe D(R). Nous allons définir deux applications linéaires et continues de $\mathrm{D}'(\mathrm{R}^2)$ en $\mathrm{D}'(\mathrm{R})$ par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}\odot\psi)\cdot\varphi &:= \mathrm{S}\cdot\varphi\otimes\psi\\ (\psi\odot\mathrm{S})\cdot\varphi &:= \mathrm{S}\cdot\psi\otimes\varphi\end{aligned}\qquad (\mathrm{S}\in\mathrm{D}'(\mathrm{R}^2)\,,\ \varphi\in\mathrm{D}(\mathrm{R})). \tag{5}$$

$\varphi\otimes\psi$ désigne le produit tensorielle de deux fonctions, c'est à dire $(\varphi\otimes\psi)(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y)$.

Maintenant nous allons démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soient* $\mathrm{T}\in\mathrm{D}'(\mathrm{R})$ *et* $\psi\in\mathrm{D}(\mathrm{R})$ *arbitraires. Alors la distribution* $\mathrm{L}(a\,,b)(\mathrm{T})\odot\psi$ $(a\neq 0\,, b\neq 0)$ *possède dans chaque point* $x_0\in\mathrm{R}$ *une valeur* (*au sens de Łojasiewicz*) *qui est égal à* $\varkappa_b\tau_{ax_0}\mathrm{T}\cdot\psi$.

Démonstration. Nous allons considérer la fonction suivante:

$$\mathrm{F}(x) := \varkappa_b\,\tau_{ax}\,\mathrm{T}\cdot\psi = \frac{1}{b}\,\mathrm{T}\cdot\psi\left(\frac{y-ax}{b}\right). \tag{6}$$

F(x) est continue en chaque point $x_0\in\mathrm{R}$. En effet soit x_0 un point arbitraire fixé. Si on désigne par supp ψ le support de ψ, alors il existe un nombre positif c pour lequel

$$\operatorname{supp}\psi\subset(-c\,,c).$$

Pour chaque $x\in(x_0-\varepsilon\,,x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$

$$\operatorname{supp}\psi\left(\frac{y-ax}{b}\right)\subset\{|y|\leq|a(x_0+\varepsilon)|+|bc|\}. \tag{7}$$

(3) S. ŁOJASIEWICZ, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*. « Studia Math. », *16*, 1–36 (1958).

D'autre part

$$\lim_{x \to x_0} \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax}{b}\right) = \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax_0}{b}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

uniformément par rapport à y sur toute l'axe réelle. Cela découle du fait que

$$\left|\psi^{(k)}\left(\frac{y - ax}{b}\right) - \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax_0}{b}\right)\right| \leq \frac{|a|}{b^2} M_k |x - x_0|$$

où $M_k = \operatorname*{Max}_{t \in R} |\psi^{(k+1)}(t)|$.

De (7) et (8) suit que $\psi\left(\frac{y - ax}{b}\right) \to \psi\left(\frac{y - ax_0}{b}\right)$ pour $x \to x_0$ selon la pseudotopologie de l'espace D(R), donc, selon la continuité de T

$$\lim_{x \to x_0} T \cdot \psi\left(\frac{y - ax}{b}\right) = T \cdot \psi\left(\frac{y - ax_0}{b}\right).$$

Ainsi nous avons démontré la continuité de $F(x)$.

Soit maintenant φ une autre fonction arbitraire de D(R). On peut supposer que

$$\operatorname{supp} \varphi \subset (-c, c).$$

On sait, que les sommes riemaniennes de la fonction

$$\Phi_{y,k}(x) := \varphi(x)\, \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax}{b}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergent uniformément par rapport à y vers

$$\int_{-c}^{c} \varphi(x)\, \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax}{b}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \psi^{(k)}\left(\frac{y - ax}{b}\right) dx$$

sur toute l'axe réelle (4). D'ici découle par une argumentation usuelle que

$$T \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \psi\left(\frac{y - ax}{b}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, T \cdot \psi\left(\frac{y - ax}{b}\right) dx = |b| \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{9}$$

Selon (9) et (5) on a

$$(L(a, b)(T) \odot \psi) \cdot \varphi = L(a, b)(T) \cdot \varphi \otimes \psi = T \cdot l(a, b)\, \varphi \otimes \psi =$$

$$= \frac{1}{|b|} T \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \psi\left(\frac{y - ax}{b}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

(4) Voir p. ex., FENYŐ e FREY, «Modern Mathematical Methods in Technology», Vol. I., Amsterdam–London 1969, p. 188, Lemma 2.

Cela nous montre que $L(a, b)(T) \odot \psi$ est une distribution identique à la fonction $F(x)$, continue en chaque point (de plus au point x_0). En employant un théorème de S. Łojasiewicz [5] on trouve que la distribution $L(a, b)(T) \odot \psi$ possède la valeur

$$F(x_0) = \varkappa_b \, \tau_{ax_0} T \cdot \psi .$$

Ainsi la proposition est donc démontré.

Une argumentation analogue montre que la distribution $\psi \odot L(a, b)(T)$ a dans chaque point y_0 une valeur et on a

$$\psi \odot L(a, b)(T)\,|_{y=y_0} = \varkappa_a \, \tau_{by_0} T \cdot \psi$$

n'import que soit $T \in D'(R)$ et $\psi \in D(R)$.

Si $a = b = 1$ et $x_0 = 0$ on a selon la proposition

$$L(1, 1)(T) \odot \psi\,|_{x_0=0} = T \cdot \psi \tag{10}$$

Dans le cas $a = 1$, $b = -1$ on obtient

$$L(1, -1)(T) \odot \psi\,|_{x_0=0} = \varkappa_{-1} T \cdot \psi = T \cdot \psi(-x) = \check{T} \cdot \psi . \tag{11}$$

$\check{T}$ est la symmetrique de T par rapport à l'origine.

Nous revenons maintenant à notre problème (1), (2). Avant tout on sait [6] que si $U \in D'(R^2)$ est une distribution satisfaisant à l'équation différentielle (1) il existent deux distributions H et K ($\in D'(R)$) telles que

$$U = L(1, 1)(H) + L(1, -1)(K) . \tag{12}$$

Cela signifie que la distribution à la droite de (12) est la solution la plus générale de (1).

Soit maintenant $\psi \in D(R)$ arbitraire, alors

$$U \odot \psi = L(1, 1)(H) \odot \psi + L(1, -1)(K) \odot \psi$$

$$\psi \odot U = \psi \odot L(1, 1)(H) + \psi \odot L(1, -1)(K) .$$

Selon (10) et (11) on est conduit à

$$\begin{aligned} U \odot \psi\,|_{x=0} &= H \cdot \psi + \check{K} \cdot \psi \\ \psi \odot U\,|_{y=0} &= H \cdot \psi + K \cdot \psi . \end{aligned} \tag{13}$$

Si l'on remplace en (2) f et g par les distributions F et G (de la classe $D'(R)$) arbitraires, données en avance, les conditions (2) se transforment das la

(5) S. ŁOJASIEWICZ, *loc. cit.*, p. 7.

(6) I. FENYÖ e A. SCHMIDT, *Über gewisse Differentialgleichungen im Bereich der Distributionen.* « Journ. f. Reine u. Angew. Math. » (sous presse).

forme suivante:

$$U \odot \psi \,|_{x=0} = F \cdot \psi \quad ; \quad \psi \odot U \,|_{y=0} = G \cdot \psi \tag{2'}$$

au bien tenant compte de (13)

$$H \cdot \psi + \check{K} \cdot \psi = F \cdot \psi$$

$$H \cdot \psi + K \cdot \psi = G \cdot \psi \,.$$

Mais comme ψ est arbitraire, on arrive aux condititons

$$H + \check{K} = F \quad ; \quad H + K = G \tag{14}$$

ce qui est equivalent au système d'équations (en tenant compte de $\check{\check{K}} = K$)

$$K - \check{K} = G - F \quad ; \quad H - \check{H} = G - \check{F}. \tag{15}$$

Notre problème se reduit donc à resoudre le système d'équations (15). De (15) découle

$$\check{K} - K = \check{G} - \check{F} \quad ; \quad \check{H} - H = \check{G} - F \,.$$

Si l'on compare ces équations avec les équations de (15), on reçoit

$$G - F = -\overset{\smile}{\overline{(G - F)}} \quad ; \quad G - \check{F} = -\overset{\smile}{\overline{(G - \check{F})}} \,. \tag{16}$$

(16) dit qu'une condition necessaire pour l'existence d'une solution de (15) est que $G - F$ et $G - \check{F}$ soient des distributions impaires.

Nous allons supposer que cette condition est rempli et nous cherchons la solution de (15) sous la forme

$$K = p\,(G - F) + A \quad ; \quad H = q\,(G - \check{F}) + B \,. \tag{17}$$

p et q sont des constants, A et B des distributions (de $D'(R)$) inconnues. Il est évident que cette supposition est toujours possible et ne conduit à aucune restriction de la généralité. En substituant les expressions (17) das les équations (15), on voit immédiatement que ces équations remplissent (15) si et seulement si $p = q = 1/2$ et A et B sont des distributions paires, de là

$$K = 1/2\,(G - F) + A \quad ; \quad H = 1/2\,(G - \check{F}) + B \,.$$

Maintenant nous mettons ces expressions dans la seconde relation (14), nous obtenons

$$H + K = G - 1/2\,(F + \check{F}) + A + B = G \,,$$

d'ici

$$A + B = 1/2\,(F + \check{F}) \,. \tag{18}$$

(La première équation (14) nous conduit à la même condition (18) en tenant compte du fait que $G - F$ et $G - \check{F}$ sont impaires). Nous avons donc démontré le théorème suivante:

THÉORÈME. *Le problème* (1), (2′) *a une solution dans le domain des distributions si et seulement si* $G - F$ *et* $G - \check{F}$ *sont des distributions impaires. Si cette condition est rempli la solution la plus générale a la forme*

$$U = L(1, 1)(H) + L(1, -1)(K) \tag{19}$$

où

$$H = 1/2\,(G - \check{F}) + 1/2\,(F + \check{F}) - A \quad ; \quad K = 1/2\,(G - F) + A\,, \tag{20}$$

A étant une distribution paire arbitraire.