Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e spinoriali. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **50** (1971), n.4, p. 456–463.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1971_8_50_4_456_0>

Fisica matematica. — *Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e spinoriali.* Nota I [(*)] di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata [(**)] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In the flat space-time referred to Galileian coordinates, we derive—in this first paper—the expression of the symmetric total energy-momentum tensor, and connected conservation laws, for a field defined by a second-rank antisymmetric tensor, depending on two potential vectors. In particular, for the free electromagnetic field in vacuo, we get the energy-momentum tensor expressed by the irrotational and the solenoidal part of the electromagnetic tensor.

Nella trattazione dei campi fisici spazio–temporali, il metodo variazionale non solo offre in modo spontaneo le equazioni indefinite di campo, che risultano compatibili e possiedono carattere invariantivo rispetto ad un generico cambiamento di riferimento spazio–temporale, ma permette anche di ottenere tutte le identità della teoria, grazie all'intimo legame che intercede fra queste e le proprietà di invarianza della azione rispetto a gruppi di trasformazioni [(1)].

Nel caso di campi definiti nello spazio–tempo pseudoeuclideo della relatività ristretta, riferito a coordinate pseudocartesiane, all'invarianza della teoria di fronte al gruppo delle trasformazioni di Lorentz è associata l'esistenza di dieci leggi di conservazione indipendenti.

Quattro di queste (conservazione dell'energia e della quantità di moto) sono espresse dall'annullarsi della divergenza di un tensore doppio simmetrico, detto da alcuni autori tensore energetico totale. Esso si differenzia dal tensore energetico canonico, pure a divergenza nulla, che non risulta, in generale, simmetrico.

La solenoidalità del tensore energetico totale, unitamente alle sei relazioni che esprimono la conservazione del momento angolare totale, è deducibile direttamente dall'invarianza dell'azione rispetto al gruppo delle trasformazioni generali di Lorentz infinitesime (rototraslazioni nello spazio–tempo) [(2)].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 aprile 1971.

(1) Cfr. ad esempio E. NOETHER, «Göttingen Nachr.», 235 (1918); A. O. BARUT, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, The Macmillan Company, New York (1964); E. M. CORSON, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave–equations*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow (1953); E. L. HILL, « Rev. of modern Phys. », *23* (3), 253, (1951); C. CATTANEO, « Rend. Sem. matem. e fisico di Milano », *39*, 196 (1969).

(2) A. O. BARUT, *loco citato*.

Valendomi di tale procedimento, *deduco in questa Nota*, a seguito di miei lavori precedenti, *l'espressione del tensore energetico totale per un campo bivettoriale* (3), ossia per un campo caratterizzato da un *tensore doppio emisimmetrico*, dipendente da due potenziali vettori.

Nel caso particolare in cui il campo è quello elettromagnetico neutro nel vuoto, il tensore energetico totale contiene i due potenziali da cui si fa dipendere (a priori) il campo, in modo perfettamente simmetrico. Ciò è conforme al fatto che se, scontando l'una o l'altra delle equazioni spazio–temporali di Maxwell, si introduce un solo potenziale elettromagnetico per descrivere il campo, ciascuno dei due potenziali vettori è ugualmente atto a compiere tale ufficio.

Passo poi a considerare (nella Nota II) un campo spinoriale caratterizzato da uno *spinore doppio simmetrico*, dipendente da un opportuno spinore potenziale, come ho mostrato in un precedente lavoro (4). Operando sullo spinore potenziale le trasformazioni spinoriali subordinate nello spazio di spin dalle trasformazioni infinitesime di Lorentz e sfruttando l'invarianza dell'azione rispetto a queste ultime, *deduco le leggi di conservazione in forma spinoriale e ottengo l'espressione dello spinore energetico totale a divergenza spinoriale nulla.*

Nel caso particolare in cui il campo spinoriale è quello elettromagnetico neutro nel vuoto, lo spinore energetico totale contiene le parti hermitiana ed anti–hermitiana dello spinore potenziale in modo simmetrico, in accordo col risultato ottenuto in forma tensoriale.

Osservo, a mò di conclusione, che se per campi ambientati nello spazio–tempo pseudoeuclideo la trattazione spinoriale e quella tensoriale sono sostanzialmente equivalenti, quando si passa in uno spazio riemanniano, come avviene per il campo gravitazionale einsteiniano, la trattazione spinoriale presenta carattere diverso da quella tensoriale (5).

È noto che con lo spinore gravitazionale si costruisce uno spinore a divergenza spinoriale nulla, corrispondente al tensore superenergia di Bel (6), allo stesso modo come con lo spinore elettromagnetico si costruisce lo spinore energetico totale (7). Penso, perciò, che l'aver legato la solenoidalità dello spinore energetico elettromagnetico all'invarianza rispetto ad opportune trasformazioni spinoriali possa servire come base per affrontare il problema, più complesso, di stabilire se e a quali caratteri di invarianza sia collegata la solenoidalità dello « spinore superenergia » costruito con lo spinore gravitazionale.

(3) E. UDESCHINI BRINIS, « Questi Rendic. », *39* (5), 269 (1965).

(4) E. UDESCHINI BRINIS, « Questi Rendic. », *40* (4), 577 (1966).

(5) Cfr. R. PENROSE, « Annals of Physics », *10*, 171 (1960); E. UDESCHINI BRINIS, « Questi Rendic. », *46* (3), 249 (1969).

(6) L. BEL, « Comptes rendus », *248*, 1297 (1959).

(7) R. PENROSE, *loco citato*; E. UDESCHINI BRINIS, *loco ultimo citato.*

1. – Campi bivettoriali: tensore energetico totale

Nello spazio–tempo pseudoeuclideo, riferito a coordinate pseudocartesiane, di metrica:

$$ds^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}) \equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \cdots = 0, 1, 2, 3) \tag{1–1}$$

si consideri un campo fisico caratterizzato da un tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}(x)$. Sia $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G_{\alpha\beta})$ la sua densità lagrangiana ed $A = \int_\tau \mathfrak{L}\, dx$ (essendo $dx = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ e τ una regione spazio–temporale qualsivoglia) la corrispondente azione.

Siano Φ_α e $\Psi^{*\gamma}$ i due potenziali vettori, funzioni regolari dei punti dello spazio–tempo, da cui si può far dipendere il campo, secondo la relazione:

$$G_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \Psi^{*\gamma/\delta} \;\; {}^{(8)} \qquad (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tensore di Ricci}). \tag{1–2}$$

Entrambi i potenziali sono definiti a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria; non si altera il campo $G_{\alpha\beta}$ eseguendo sui potenziali le trasformazioni « di gauge »:

$$\Phi'_\alpha = \Phi_\alpha + \lambda_{/\alpha} \quad ; \quad \Psi^{*'\gamma} = \Psi^{*\gamma} + \eta^{/\gamma} \tag{1–3}$$

con $\lambda(x)$ e $\eta(x)$ funzioni arbitrarie, disponendo delle quali si possono imporre due condizioni di gauge, in particolare le condizioni di solenoidalità.

La stazionarietà dell'azione A in corrispondenza a variazioni arbitrarie $\overset{*}{\delta}\Phi_\alpha$, $\overset{*}{\delta}\Psi^{*\gamma}$ dei potenziali, nulle al contorno della regione τ, fornisce, come è noto, le equazioni di campo [9]:

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho} = 0 \tag{1–4}$$

legate dalle due identità differenziali:

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)_{/\alpha\beta} \equiv 0 \quad ; \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\right)^{/\varrho\gamma} \equiv 0\,. \tag{1–5}$$

Conviene osservare che le variazioni dei potenziali che abbiamo contrassegnato col simbolo $\overset{*}{\delta}$ sono intrinseche, ossia non toccano le coordinate dei punti dello spazio–tempo.

L'esistenza delle due identità (1–5) è collegata all'invarianza dell'azione rispetto alle trasformazioni di gauge (1–3). Le (1–5) discendono infatti direttamente, coi consueti sviluppi di calcolo, dall'essere $\overset{*}{\delta}A \equiv 0$ in corri-

(8) B. Finzi, « Questi Rendic. », *8* (12), 378 (1952). La barretta che precede un indice è simbolo di derivata covariante. Poichè operiamo in coordinate pseudocartesiane, questa coincide con la derivazione ordinaria, contrassegnata dalla virgola.

(9) E. Udeschini Brinis, *loco primo citato*.

spondenza a variazioni arbitrarie dei potenziali, nulle al contorno, del tipo: $\tilde{\delta}\Phi_\alpha = \tilde{\delta}\lambda_{/\alpha}$; $\tilde{\delta}\Psi^{\cdot\gamma} = \tilde{\delta}\eta^{/\gamma}$.

Si tratta di due identità forti, ossia indipendenti dal verificarsi delle equazioni di campo, coerentemente col fatto che le trasformazioni (1–3), rispetto alle quali l'azione è invariante, contengono due funzioni arbitrarie.

L'invarianza dell'azione rispetto al gruppo di Lorentz comporta invece l'esistenza di dieci equazioni indipendenti, interpretabili come leggi di conservazione. Esse costituiscono delle identità deboli, ossia diventano delle identità quando si suppongono verificate le equazioni di campo; si hanno cioè (conformemente ai teoremi della Noether) tante identità deboli quanti sono i parametri costanti arbitrari da cui dipende il gruppo di Lorentz.

Stabiliamole, in forma esplicita, per i campi bivettoriali.

In corrispondenza ad una generica trasformazione infinitesima di coordinate:

(1–6) $$x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha$$

i potenziali vettori subiscono una variazione «locale» (o variazione in valore):

(1–7) $$\delta\Phi^\alpha \equiv \Phi'^\alpha(x') - \Phi^\alpha(x) = \Phi^\varrho\,\delta x^\alpha{}_{,\varrho}$$

ed una variazione «sostanziale» (o variazione in forma) (10):

(1–8) $$\delta^*\Phi^\alpha \equiv \Phi'^\alpha(x) - \Phi^\alpha(x) = \delta\Phi^\alpha - \Phi^\alpha{}_{,\varrho}\,\delta x^\varrho = \Phi^\varrho\,\delta x^\alpha{}_{,\varrho} - \Phi^\alpha{}_{,\varrho}\,\delta x^\varrho$$

mentre, per una funzione scalare $f(x)$, si ha: $\delta f = 0$, $\delta^* f = -f_{,\varrho}\,\delta x^\varrho$. Inoltre, a meno di infinitesimi di ordine superiore, sussiste l'identità:

(1–9) $$\delta A \equiv \int_\tau [\delta^*\mathfrak{L} + (\mathfrak{L}\,\delta x^\nu)_{,\nu}]\, dx$$

L'invarianza dell'azione rispetto ad una trasformazione infinitesima di Lorentz:

(1–10) $$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha + \omega^\alpha{}_\varrho\, x^\varrho$$

(con a^α ed $\omega^{\alpha\varrho} = -\omega^{\varrho\alpha}$ infinitesimi indipendenti da x), si può allora esprimere con la relazione $\delta A \equiv 0$, che si riduce, tenendo conto delle (1–9) ed (1–2) e ammesse verificate le equazioni di campo (1–4), all'identità debole (11):

(1–11) $$\int_\tau \left\{ \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G^{\beta\alpha}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} \right) \delta^*\Phi^\alpha \right]^{/\beta} + \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}}\, \delta^*\Psi^{\cdot\gamma} \right]^{/\delta} + [\mathfrak{L}\,\delta x^\nu]_{/\nu} \right\} dx = 0$$

(10) La variazione sostanziale δ^*, a differenza di quella locale δ, è permutabile con l'operazione di derivazione rispetto alle x.

(11) D'ora in avanti, per comodità di calcolo, indicheremo tutte le derivate col simbolo di derivazione covariante. Ciò è lecito perché operiamo sempre in coordinate pseudocartesiane.

ove:

$$\delta x^\alpha = a^\alpha + \omega^\alpha{}_\varrho\, x^\varrho \tag{1–12}$$

$$\delta^* \Phi^\alpha = \Phi^\varrho \omega^\alpha{}_\varrho - \Phi^\alpha{}_{/\varrho}\, \delta x^\varrho \tag{1–13}$$

e $\delta^* \Psi^{\cdot\gamma}$ ha analoga espressione.

Essendo poi:

$$\omega^{\alpha\varrho} = \delta x^{\alpha/\varrho} = -\delta x^{\varrho/\alpha} \tag{1–14}$$

la (1–11) assume la forma:

$$\int_\tau \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\beta\alpha}} \right) (\Phi_\varrho\, \delta x^{\varrho/\alpha} + \Phi^\alpha{}_{/\varrho}\, \delta x^\varrho) \right]^{/\beta} - \right.$$

$$\left. - \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} (\Psi^{\cdot}{}_\varrho\, \delta x^{\varrho/\gamma} + \Psi^{\cdot\gamma}{}_{/\varrho}\, \delta x^\varrho) \right]^{/\delta} + [\mathfrak{L}\delta x^\nu]_{/\nu} \right\} dx = 0$$

dalla quale, osservando che le due espressioni $\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\beta\alpha}} \right) \Phi_\varrho\, \delta x^\varrho \right]^{/\alpha\beta}$ e $\left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} \Psi^{\cdot}{}_\varrho\, \delta x^\varrho \right]^{/\gamma\delta}$ risultano identicamente nulle (per la saturazione di due indici di simmetria con due di emisimmetria, nello spazio–tempo pseudoeuclideo) e sfruttando nuovamente le equazioni di campo (1–4), si ottiene:

$$\int_\tau \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\alpha}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}} \right) (\Phi_\varrho{}^{/\alpha} - \Phi^\alpha{}_{/\varrho}) + \right. \right. \tag{1–15}$$

$$\left. \left. + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} (\Psi^{\cdot}{}_\varrho{}^{/\gamma} - \Psi^{\cdot\gamma}{}_{/\varrho}) + \mathfrak{L}\eta_{\varrho\nu} \right] \delta x^\varrho \right\}^{/\nu} dx = 0 .$$

Posto:

$$E_{\varrho\nu} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\alpha}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}} \right) (\Phi_\varrho{}^{/\alpha} - \Phi^\alpha{}_{/\varrho}) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} (\Psi^{\cdot}{}_\varrho{}^{/\gamma} - \Psi^{\cdot\gamma}{}_{/\varrho}) + \mathfrak{L}\eta_{\varrho\nu} \tag{1–16}$$

e tenendo conto dell'espressione esplicita (1–12) di δx^ϱ, la (1–15) si può scrivere:

$$\int_\tau \{ E_{\varrho\nu}{}^{/\nu} a^\varrho + (E_{\varrho\nu} x^\sigma)^{/\nu} \omega^\varrho{}_\sigma \} \, dx = 0 \tag{1–17}$$

e, dovendo essere verificata identicamente rispetto ai parametri arbitrari a^ϱ ed $\omega^\varrho{}_\sigma$, dà luogo alle equazioni di conservazione:

$$E_{\varrho\nu}{}^{/\nu} = 0 \tag{1–18}$$

$$[E^{\varrho\nu} x^\sigma - E^{\sigma\nu} x^\varrho]_{/\nu} = 0 \tag{1–19}$$

interpretabili, rispettivamente, come conservazione dell'energia e della quantità di moto del campo la prima (che riassume quattro equazioni scalari) e del momento angolare totale la seconda (che ne riassume sei).

Le (1–18) e (1–19) implicano la simmetria del tensore $E_{\varrho\nu}$ (12) che rappresenta il tensore energetico totale del campo. Esso risulta anche invariante per trasformazioni di gauge, come si verifica facilmente esaminandone l'espressione (1–16) (13). Pertanto tale tensore è atto a caratterizzare lo stato energetico locale del campo.

Si osservi che, dall'invarianza dell'azione rispetto a semplici traslazioni: $\delta x^\alpha = a^\alpha$, si deduce invece (sempre dalla (1–11)) la solenoidalità del tensore energetico canonico $H_{\varrho\nu}$:

$$H_{\varrho\nu} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\alpha}}\right) \Phi^{\alpha}{}_{/\varrho} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} \Psi^{\cdot\gamma}{}_{/\varrho} + \mathfrak{L}\eta_{\varrho\nu} \tag{1–20}$$

che non risulta, in generale, né simmetrico né gauge–invariante.

L'espressione (1–16) del tensore $E_{\varrho\nu}$ si può trasformare in modo da mettere in evidenza le parti irrotazionale e solenoidale del campo.

Posto:

$$A_{\alpha\beta} \equiv \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} \quad ; \quad B_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Psi^{\cdot\gamma/\delta} \tag{1–21}$$

e introducendo il duale $\breve{B}_{\alpha\beta}$ del tensore emisimmetrico $B_{\alpha\beta}$, risulta infatti:

$$\breve{B}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} B^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\gamma\delta\varrho\sigma} \Psi^{\cdot}{}_{\varrho/\sigma} = \Psi^{\cdot}{}_{\alpha/\beta} - \Psi^{\cdot}{}_{\beta/\alpha} . \tag{1–22}$$

La (1–16) si può allora scrivere:

$$E_{\varrho\nu} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\alpha}}\right) A_{\varrho}{}^{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon_{\varrho}{}^{\gamma}{}_{\mu\sigma} B^{\mu\sigma} + \mathfrak{L}\eta_{\varrho\nu}$$

e quindi:

$$E_{\varrho\nu} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\alpha}}\right) A_{\varrho}{}^{\alpha} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\varrho}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\varrho\alpha}}\right) B^{\alpha}{}_{\nu} + \left(\mathfrak{L} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\beta}} B^{\alpha\beta}\right)\eta_{\varrho\nu} . \tag{1–23}$$

2. – CASO PARTICOLARE: CAMPO ELETTROMAGNETICO NEUTRO, NEL VUOTO

Ammettiamo che $G_{\alpha\beta}$ si identifichi col tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ (dipendente a priori da due potenziali φ_α e ψ^γ) ed assumiamo come azione quella di puro campo elettromagnetico:

$$A = \int_\tau \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \, dx . \tag{2–1}$$

(12) Dalla (1–19), tenendo conto della (1–18), segue: $E^{\varrho\nu} \delta^{\sigma}_{\nu} - E^{\sigma\nu} \delta^{\varrho}_{\nu} = 0$, essendo δ^{σ}_{ν} il delta di Kronecker.

(13) Detta invarianza compete infatti ad $\mathfrak{L}$ ed a $G_{\alpha\nu}$ $\left(\text{quindi a } \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\alpha\nu}}\right)$, così come alle differenze $\Phi_{\varrho/\alpha} - \Phi_{\alpha/\varrho}$ e $\Psi^{\cdot\varrho/\gamma} - \Psi^{\cdot\gamma/\varrho}$.

Si ha, dalla (1–23), indicando con $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$ le parti irrotazionale e solenoidale di $F_{\alpha\beta}$:

$$E_{\varrho\nu} \equiv F_{\alpha\nu}\, a_\varrho^{\ \alpha} + F_{\alpha\varrho}\, b^\alpha_{\ \nu} + \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\, b^{\alpha\beta}\right) \eta_{\varrho\nu}$$

da cui:

$$E_{\varrho\nu} \equiv a_{\alpha\nu}\, a_\varrho^{\ \alpha} + \frac{1}{4} a_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} \eta_{\varrho\nu} - \left(b_{\alpha\nu}\, b_\varrho^{\ \alpha} + \frac{1}{4} b_{\alpha\beta}\, b^{\alpha\beta} \eta_{\varrho\nu}\right). \tag{2–2}$$

Il tensore energetico $E_{\varrho\nu}$ si spezza spontaneamente in due addendi costruiti rispettivamente con le sole parti irrotazionale e solenoidale del tensore elettromagnetico.

Se, scontando una delle due equazioni spazio–temporali di Maxwell, si ritiene (a posteriori) il tensore elettromagnetico irrotazionale ($F_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$) oppure, scontando l'altra, lo si ritiene solenoidale ($F_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$), in entrambi i casi si ritrova (a meno del segno) la ben nota espressione del tensore di Minkowski (14), in accordo col fatto che i due potenziali φ_α e ψ^γ sono ugualmente atti a individuare il campo elettromagnetico neutro.

Osserviamo, a conferma del significato fisico che compete al tensore energetico $E_{\varrho\nu}$ di espressione (2–2), che esso coincide con il «tensore energetico metrico» deducibile dalla densità lagrangiana $\mathfrak{L}$ espressa in coordinate generali.

Detto $g_{\alpha\beta}$ il tensore fondamentale in un generico riferimento spazio–temporale e g il determinante della metrica, il tensore energetico metrico è così definito (15):

$$E_{\varrho\nu}^{(m)} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{\varrho\nu}} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\varrho\nu}_{\ \ ,\gamma}}\right)_{,\gamma} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\varrho\nu}}\right]. \tag{2–3}$$

Essendo, nel caso in esame:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = \tag{2–4}$$

$$= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{4} a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta}\, g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\, \psi_{\varrho/\eta}\, \varepsilon^{\alpha\beta\varrho\eta} + \frac{1}{2} \psi_{\mu/\sigma}\, \psi_{\varrho/\eta} \left(g^{\mu\varrho} g^{\sigma\eta} - g^{\mu\eta} g^{\sigma\varrho}\right)\right]$$

(14) La differenza di segno scompare se si introducono esplicitamente i due potenziali. Si ottiene difatti, dalla (2–2):

$$E_{\varrho\nu} \equiv \left(\varphi_{\nu/\alpha} - \varphi_{\alpha/\nu}\right)\left(\varphi^\alpha_{\ /\varrho} - \varphi_\varrho^{\ /\alpha}\right) + \frac{1}{2} \varphi_{\beta/\alpha}\left(\varphi^{\beta/\alpha} - \varphi^{\alpha/\beta}\right) \eta_{\varrho\nu} +$$

$$+ \left(\psi_{\nu/\alpha} - \psi_{\alpha/\nu}\right)\left(\psi^\alpha_{\ /\varrho} - \psi_\varrho^{\ /\alpha}\right) + \frac{1}{2} \psi_{\beta/\alpha}\left(\psi^{\beta/\alpha} - \psi^{\alpha/\beta}\right) \eta_{\varrho\nu}\,.$$

(15) Cfr. C. CATTANEO, *loco citato*.

risulta:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{\varrho\nu}} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\varrho\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[a_{\varrho\delta}\, a^{\delta}{}_{\nu} + \frac{1}{4}\, a_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu} - (\psi_{\varrho/\sigma} - \psi_{\sigma/\varrho})\,(\psi_{\nu}{}^{/\sigma} - \psi^{\sigma}{}_{/\nu}) + \frac{1}{4}\, b_{\alpha\beta}\, b^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu}\right]$$

e poichè, per la (1–22):

$$(2\text{–}5) \qquad (\psi_{\varrho/\sigma} - \psi_{\sigma/\varrho})\,(\psi_{\nu}{}^{/\sigma} - \psi^{\sigma}{}_{/\nu}) = \breve{b}_{\varrho\sigma}\,\breve{b}_{\nu}{}^{\sigma} = \frac{1}{2}\, g_{\varrho\nu}\, b_{\mu\sigma}\, b^{\mu\sigma} + b_{\varrho\sigma}\, b^{\sigma}{}_{\nu}$$

si ha infine:

$$(2\text{–}6) \qquad \mathrm{E}_{\varrho\nu}{}^{(m)} = a_{\varrho\delta}\, a^{\delta}{}_{\nu} + \frac{1}{4}\, a_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu} - b_{\varrho\sigma}\, b^{\sigma}{}_{\nu} - \frac{1}{4}\, b_{\alpha\beta}\, b^{\alpha\beta} g_{\varrho\nu}\,.$$

In coordinate pseudocartesiane ($g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$), la precedente si riduce alla (2–2).